

Modelo 3 de 2009

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Unificamos las fracciones:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x}{(x^2 - 1) \ln x}.$$

Al tender x a 1, numerador y denominador tienden a cero. Aplicando L'Hôpital una vez se obtiene otra indeterminación $0/0$; aplicándolo de nuevo,

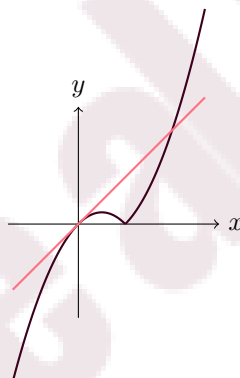
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + 2/x^2}{2 \ln x + 3 + 1/x^2} = \frac{4}{4} = \boxed{1}.$$

Opción A · Ejercicio 2

Por tramos,

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2, & x < 1, \\ x^2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, así que la recta tangente es $y = x$. El gráfico queda debajo de esta tangente entre sus cortes $x = 0$ y $x = 2$:



Como $f - y = -x^2$ en $[0, 1]$ y $f - y = x^2 - 2x$ en $[1, 2]$, el área es

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \boxed{1}.$$

Opción A · Ejercicio 3

Usamos las propiedades $\det(B^{-1}) = 1/\det B$, $\det(B^T) = \det B$ y $\det(kB) = k^3 \det B$:

$$\text{a) } \det(B^{-1}) = -\frac{1}{2}, \quad \text{b) } \det((B^T)^4) = (-2)^4 = 16, \quad \text{c) } \det(2B) = 2^3(-2) = -16.$$

Para el apartado d), la matriz de filas nuevas se obtiene de B mediante $F'_1 = 5F_1 - F_3$, $F'_2 = 3F_3$, $F'_3 = F_2$. La matriz de esta transformación de filas tiene determinante -15 , por lo que el determinante pedido es $(-15)(-2) = \boxed{30}$.

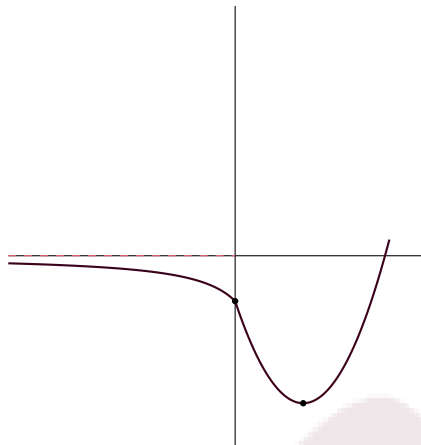
Opción A · Ejercicio 4

Las rectas son $r = (1, 1, \lambda - 2)$, de dirección $(0, 0, 1)$, y $s = (\mu, \mu - 1, -1)$, de dirección $(1, 1, 0)$. La diferencia entre puntos de ambas rectas ha de ser perpendicular a las dos direcciones. Si igualamos alturas, $\lambda - 2 = -1$, así que $\lambda = 1$. La perpendicularidad horizontal impone $(\mu - 1) + ((\mu - 1) - 1) = 0$, de donde $\mu = 3/2$. El segmento común perpendicular une $(1, 1, -1)$ con $(3/2, 1/2, -1)$ y tiene dirección $(1, -1, 0)$. La recta pedida es

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + t(1, -1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B · Ejercicio 1

La continuidad en $x = 0$ exige que las ramas coincidan: ambas valen -1 . Las derivadas laterales son $-1/(x-1)^2$ y $2x-3$; en 0 valen -1 y -3 , respectivamente. La función es continua pero no derivable en 0 . En $x < 0$, $f'(x) = -1/(x-1)^2 < 0$, y en $x \geq 0$, $f'(x) = 2x-3$. La función decrece hasta $x = 3/2$ y crece después; tiene mínimo relativo $f(3/2) = -13/4$. En $x = 0$ no hay extremo porque decrece a ambos lados. No hay asíntotas verticales, pues $x = 1$ queda fuera del tramo racional. Cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, así que $y = 0$ es horizontal por la izquierda; hacia $+\infty$ la rama cuadrática no tiene asíntota. Estas ramas y el mínimo determinan el esbozo:



Opción B · Ejercicio 2

Los cortes cumplen $x^3 - 3x = 2$, es decir, $(x+1)^2(x-2) = 0$. En $[-1, 2]$ la recta queda por encima de la curva. La tangencia en $x = -1$ cierra el recinto con el segundo corte $x = 2$; el área es

$$A = \int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) dx = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

Opción B · Ejercicio 3

Sean x, y, z las cajas compradas en cada mercado. El sistema es

$$x + y + z = 1500, \quad 20x + 30y + 40z = 40500, \quad x = 0.3(1500) = 450.$$

Restando 20 veces la primera ecuación de la segunda, $10y + 20z = 10500$, o $y + 2z = 1050$. Junto con $y + z = 1050$, resulta $z = 0$ y $y = 1050$. Por tanto, se pagó $20(450) = \boxed{9000 \text{ €}}$ en el primer mercado, $\boxed{31500 \text{ €}}$ en el segundo y $\boxed{0 \text{ €}}$ en el tercero.

Opción B · Ejercicio 4

Las rectas tienen directores $d_r = (1, -1, 1)$ y $d_s = (-1, -1, -1)$, que no son proporcionales. Para buscar su intersección igualamos

$$(t, 2-t, -2+t) = (2-u, 1-u, -u).$$

De las coordenadas se obtiene $t = 3/2$ y $u = 1/2$, que verifican la tercera coordenada. Por tanto, son secantes y se cortan en $P = (3/2, 1/2, -1/2)$. Escribimos un punto genérico de r como $C = (t, 2-t, -2+t)$. Para que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares, imponemos su producto escalar nulo:

$$(A - C) \cdot (B - C) = 3(1-t)(2-t) = 0.$$

Así, $t = 1$ o $t = 2$. Los puntos son $\boxed{C_1 = (1, 1, -1), \quad C_2 = (2, 0, 0)}$.