

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2004

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Inversa y ecuación matricial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos $\det B = 3 \neq 0$, así que B es invertible. Su inversa, obtenida por adjunta o reducción de Gauss, es

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) De $A = BX$ multiplicamos por B^{-1} por la izquierda: $X = B^{-1}A$. Efectuamos el producto:

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. B^{-1} y X son las matrices indicadas; se comprueba que $BB^{-1} = I$ y $BX = A$.

Opción A - Ejercicio 2. Determinante y matriz nilpotente

a) Usamos $\det(A^2) = (\det A)^2$. Como A^2 es la matriz nula, su determinante vale cero; por tanto,

$$(\det A)^2 = 0 \implies \det A = 0.$$

b) La condición es

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - kI \right]^2 = 0.$$

Al multiplicar la matriz por sí misma se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} k^2 - 6k + 5 & 8k - 8 \\ 2 - 2k & k^2 + 2k - 3 \end{pmatrix}.$$

Para que sea la matriz nula, las entradas no diagonales exigen $8k - 8 = 0$, es decir, $k = 1$. Al sustituirlo, las dos entradas diagonales también valen cero. **Conclusión.** $\det A = 0$ y el valor buscado es $k = 1$.

Opción A - Ejercicio 3. Simetría, plano perpendicular y volumen

El plano es $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$, cuyo vector normal es $\vec{n} = (1, 2, 3)$. La perpendicular desde el origen sigue la dirección de este vector. El pie H de la perpendicular se obtiene con la proyección sobre $\vec{n}$:

$$H = \frac{6}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{6}{7} (1, 2, 3) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7} \right).$$

El simétrico del origen respecto al plano es $S = 2H$, pues H es el punto medio entre ambos:

$$S = \left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{36}{7} \right).$$

b) Un plano que contiene al eje OZ tiene ecuación $ax + by = 0$. Para que sea perpendicular a π , su normal $(a, b, 0)$ debe ser perpendicular a $(1, 2, 3)$, de modo que $a + 2b = 0$. Tomando $(a, b) = (2, -1)$:

$$2x - y = 0.$$

c) Los cortes con los ejes son $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$. El volumen del tetraedro rectángulo es

$$V = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 6.$$

Conclusión. El punto simétrico es $(6/7, 12/7, 18/7)$, el plano pedido es $2x - y = 0$ y el volumen vale 6.

Opción A - Ejercicio 4. Crecimiento, extremos e inflexión

La derivada es $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7) = (x - 4)^2(x - 1)(x - 7)$. Como el factor cuadrado no cambia de signo, analizamos los puntos críticos 1, 4, 7:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 7)$	$(7, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+

La función crece hasta 1, decrece entre 1 y 7 (aunque la derivada se anula en 4) y vuelve a crecer desde 7. Por el cambio de signo, hay máximo relativo en $x = 1$ y mínimo relativo en $x = 7$.

Para decidir si $x = 4$ es inflexión, estudiamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 2(x - 4)(2x^2 - 16x + 23).$$

El segundo factor vale -9 en $x = 4$, por lo que f'' cambia de signo al atravesar ese punto. La gráfica cambia de concavidad allí. **Conclusión.** Hay un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 7$; $x = 4$ sí es una abscisa de inflexión, aunque no sea extremo.

Opción B - Ejercicio 1. Puntos a distancia fija de un plano

Para $P = (x, y, 0)$, la distancia al plano $2x - y + 2z - 4 = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2x - y - 4|}{3}.$$

Imponemos que valga 3:

$$|2x - y - 4| = 9 \implies 2x - y - 4 = 9 \quad \text{o} \quad 2x - y - 4 = -9.$$

En el plano $z = 0$ se obtienen las rectas $y = 2x - 13$ y $y = 2x + 5$. Son paralelas porque tienen la misma pendiente. **Conclusión.** El lugar geométrico es la unión de dos rectas paralelas del plano $z = 0$: $y = 2x - 13$ y $y = 2x + 5$.

Opción B - Ejercicio 2. Altura y cara del tetraedro

El plano $2x - 2y + z = 2$ tiene normal $\vec{n} = (2, -2, 1)$. La distancia del origen al plano, que es la altura solicitada, es

$$h = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

La recta de la altura pasa por el origen y tiene dirección normal; en forma paramétrica queda

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Los vértices de la cara apoyada en el plano son sus intersecciones con los ejes: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$. Tomamos dos lados desde A y usamos el producto vectorial para hallar el área del triángulo:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 2, -1).$$

Por tanto,

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|(-2, 2, -1)\| = \frac{3}{2}.$$

Conclusión. La altura mide $2/3$, su recta tiene dirección $(2, -2, 1)$ y el área de la cara es $3/2$.

Opción B - Ejercicio 3. Extremos, asíntotas y área

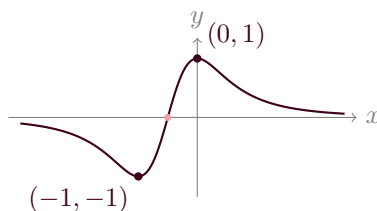
El denominador $q(x) = x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$ es positivo para todo x , así que $D_f = \mathbb{R}$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}.$$

El denominador es positivo; el signo de f' cambia en $x = -1$ y $x = 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$. Así, $f(-1) = -1$ es un mínimo relativo y $f(0) = 1$ un máximo relativo.

No hay asíntotas verticales porque el denominador no se anula. Como $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la asíntota horizontal es $y = 0$ en ambos extremos.

Para dibujarla, añadimos los puntos notables. El corte con el eje X es $x = -1/2$ y las abscisas de inflexión dadas son $(-1 - \sqrt{3})/2$, $-1/2$ y $(-1 + \sqrt{3})/2$; sus ordenadas son, respectivamente, $-4\sqrt{3}/9$, 0 y $4\sqrt{3}/9$.



En $[0, 2]$ el numerador $2x + 1$ y el denominador son positivos, por lo que el área coincide con la integral. Con $u = x^2 + x + 1$ y $du = (2x + 1)dx$:

$$A = \int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2+x+1} \right]_0^2 = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Conclusión. El mínimo relativo es -1 en $x = -1$, el máximo relativo es 1 en $x = 0$, la asíntota horizontal es $y = 0$ y el área pedida vale $6/7$.

Opción B - Ejercicio 4. Discusión y resolución del sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante es $-2(\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Si $\lambda \neq 2, -1$, el rango de A es tres y el sistema es compatible determinado.

Para los valores singulares, el menor de las dos primeras filas y columnas x, y vale $\lambda^2 - 3$. En $\lambda = -1$ es -2 , y en $\lambda = 2$ es 1 ; por tanto, $\text{rg}(A) = 2$ en ambos casos. Al reducir las matrices ampliadas, no aparece una fila contradictoria: $\text{rg}(A^*) = 2$, luego ambos casos son compatibles indeterminados.

$$\lambda = -1: \quad (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 0, 1),$$

$$\lambda = 2: \quad (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(4, -3, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para el apartado b), tomamos $\lambda = 2$ y comprobamos la familia en el sistema: $x = 1 + 4t$, $y = -3t$, $z = t$ satisface las tres ecuaciones. **Conclusión.** El sistema es SCD si $\lambda \neq -1, 2$ y SCI si $\lambda = -1$ o 2 ; para $\lambda = 2$ sus soluciones son las indicadas.