

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Producción de cerveza

Sean x e y los litros diarios de cerveza de tipo A y B. Las condiciones del enunciado son

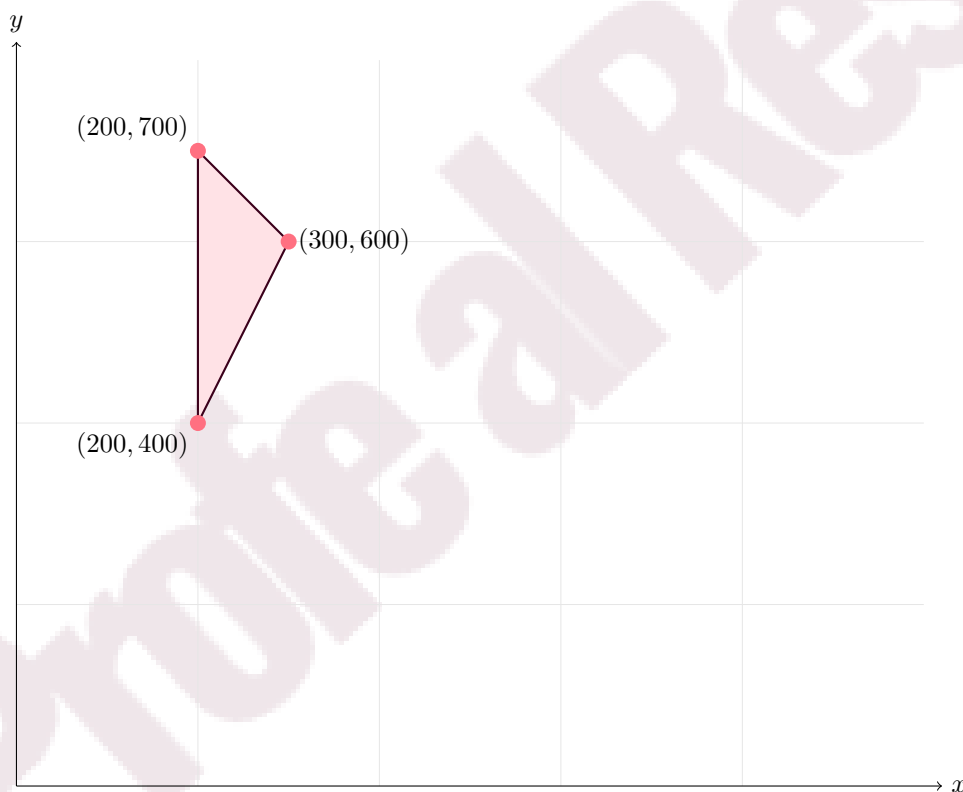
$$x \geq 200, \quad y \geq 2x, \quad x + y \leq 900.$$

El beneficio es $G(x, y) = 2x + 2,5y$. Los vértices de la región factible se obtienen intersectando sus fronteras:

$$(200, 400), \quad (200, 700), \quad \begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 900 \end{cases} \Rightarrow (300, 600).$$

Evaluamos el beneficio en los tres vértices:

(x, y)	$(200, 400)$	$(200, 700)$	$(300, 600)$
$G(x, y)$	1400	2150	2100



Conviene producir 200 litros de A y 700 litros de B, con un beneficio máximo de 2150 euros.

$$A = 200 \text{ L}, \quad B = 700 \text{ L}; \quad G_{\max} = 2150 \text{ €}.$$

Problema 2 · Estudio de una función cúbica

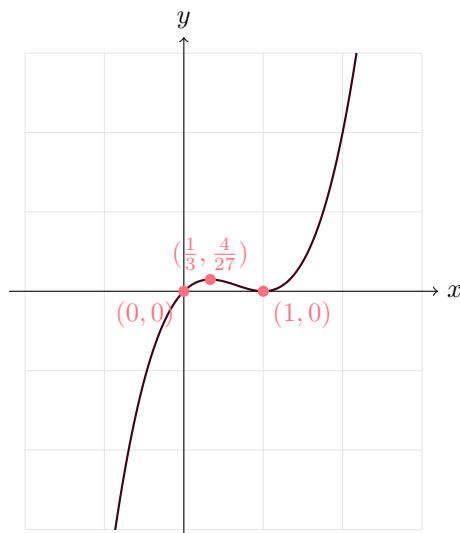
La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$ es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Sus ceros son $x = 0$ y $x = 1$; el corte con ambos ejes está en $(0, 0)$ y también corta el eje X en $(1, 0)$.

Crecimiento y extremos. Calculamos la derivada y resolvemos la ecuación de los puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, 1.$$

Como la parábola que representa a f' abre hacia arriba, su signo es positivo fuera de las raíces y negativo entre ellas. Así, f crece en $(-\infty, 1/3)$ y $(1, +\infty)$, y decrece en $(1/3, 1)$. Los cambios de signo dan

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \quad (\text{máximo local}), \quad f(1) = 0 \quad (\text{mínimo local}).$$



e) La expresión de g es $f(x - 2)$, es decir, la gráfica de f trasladada dos unidades a la derecha. Por tanto, sus extremos conservan las ordenadas y sus abscisas aumentan en 2:

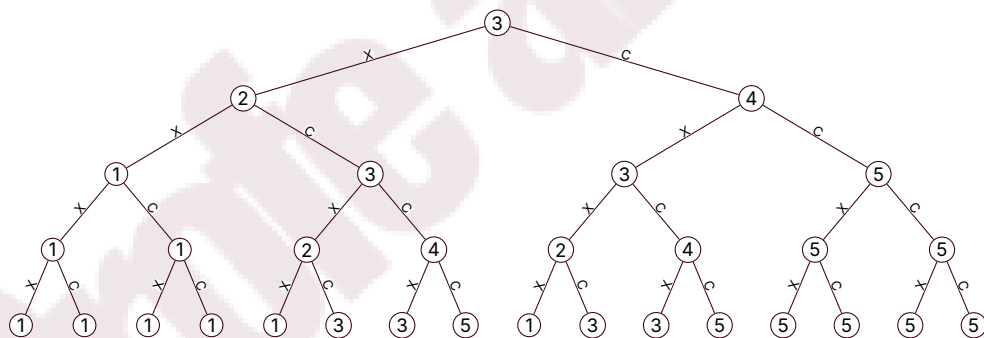
g tiene un máximo local en $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ y un mínimo local en $(3, 0)$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \quad \text{cortes } (0, 0), (1, 0); \quad \max_{\text{loc}} f = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), \quad \min_{\text{loc}} f = (1, 0).$$

Problema 3 · Desplazamiento entre sillas

En cada lanzamiento, cara (C) mueve una silla a la derecha y cruz (X) una a la izquierda, con probabilidad $1/2$ cada una. Las sillas 1 y 5 son absorbentes: una vez alcanzadas, el ocupante permanece en ellas.

a) El árbol muestra la silla ocupada tras cada lanzamiento; cada rama tiene probabilidad $1/2$ y cada trayectoria completa, $1/16$.



b)–c) Tras tres lanzamientos, las ocho secuencias equiprobables dejan las probabilidades de silla

$$P(1) = \frac{1}{4}, \quad P(2) = \frac{1}{4}, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = \frac{1}{4}, \quad P(5) = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, la probabilidad de volver a la silla central es 0 y la de estar en un extremo es $1/4 + 1/4 = 1/2$.

d) Al lanzar la moneda una cuarta vez, quien ya está en una silla extrema permanece allí. Desde la silla 2 se llega a un extremo con probabilidad $1/2$, y desde la silla 4 sucede lo mismo. Así,

$$P(\text{extremo tras 4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$P(\text{central tras 3}) = 0; \quad P(\text{extremo tras 3}) = \frac{1}{2}; \quad P(\text{extremo tras 4}) = \frac{3}{4}.$$

Opción B

Problema 1 · Puntuaciones de un examen

Sean x_1, x_2, x_3 las puntuaciones de las tres preguntas. Los datos dan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,5, \quad x_3 = x_2 + 1, \quad x_1 = 5(x_3 - x_1).$$

La última igualdad implica $6x_1 = 5x_3$, luego $x_3 = 6x_1/5$. Como $x_2 = x_3 - 1$, sustituimos en la suma total:

$$x_1 + 2x_3 - 1 = 7,5 \implies x_1 + 2\left(\frac{6}{5}x_1\right) = 8,5 \implies x_1 = 2,5.$$

De aquí $x_3 = 3$ y $x_2 = 2$.

Primera: 2,5; segunda: 2; tercera: 3 puntos.

Problema 2 · Función definida a trozos

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20, & x \leq 3, \\ \frac{2}{a-x}, & x > 3. \end{cases}$$

a) Cada expresión es continua en su tramo. Para que sea continua en $x = 3$, el límite por la derecha debe coincidir con el valor del primer tramo:

$$f(3) = 27 - 9 - 20 = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2}{a-3}.$$

Igualando, $2/(a-3) = -2$, de donde $a = 2$.

b) Para $a = 0$, en el segundo tramo $f(x) = -2/x$. La función está definida en todo $\mathbb{R}$ y presenta un salto en $x = 3$, ya que $f(3) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2/3$. En el primer tramo,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1),$$

que es positiva en $(-\infty, -1)$ y $(1, 3)$ y negativa en $(-1, 1)$. En $x > 3$, $f'(x) = 2/x^2 > 0$. Así, decrece en $(-1, 1)$ y crece en $(-\infty, -1)$, $(1, 3]$ y $(3, +\infty)$; los valores a ambos lados del salto siguen siendo crecientes al cruzarlo.

c) En $x = -1$ la derivada cambia de positiva a negativa, y en $x = 1$ de negativa a positiva:

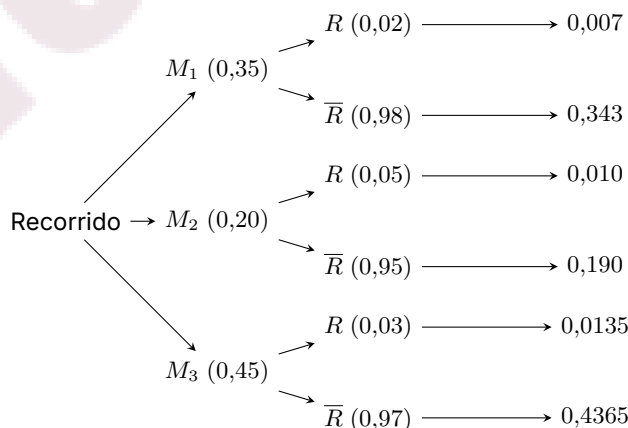
$$f(-1) = -18, \quad f(1) = -22.$$

Son, respectivamente, máximo y mínimo locales. El punto de salto $x = 3$ no es un extremo local: a su izquierda los valores son menores que $f(3)$ y a su derecha son mayores.

$a = 2$; máximo local $(-1, -18)$; mínimo local $(1, -22)$.

Problema 3 · Retrasos según el destino

Sean M_1, M_2, M_3 los sucesos «el recorrido se dirige al municipio 1, 2 o 3» y R el suceso «el recorrido sufre retraso». Multiplicamos las probabilidades de las ramas para obtener cada probabilidad conjunta:



a) La puntualidad es el suceso contrario al retraso. Sumamos los caminos sin retraso:

$$P(\bar{R}) = 0,35(0,98) + 0,20(0,95) + 0,45(0,97) = 0,9695.$$

Por tanto, el 96,95% de los recorridos llega puntualmente. b) El suceso pedido combina destino 2 y retraso:

$$P(M_2 \cap R) = P(M_2)P(R | M_2) = 0,20(0,05) = 0,01.$$

c) Primero sumamos los tres caminos con retraso:

$$P(R) = 0,35(0,02) + 0,20(0,05) + 0,45(0,03) = 0,0305.$$

Aplicamos la probabilidad condicionada a cada destino:

$$P(M_1 | R) = \frac{0,007}{0,0305} = \frac{14}{61}, \quad P(M_2 | R) = \frac{0,010}{0,0305} = \frac{20}{61}, \quad P(M_3 | R) = \frac{0,0135}{0,0305} = \frac{27}{61}.$$

La mayor probabilidad corresponde al destino 3.

$P(\overline{R}) = 96,95\%; \quad P(M_2 \cap R) = 0,01; \quad \text{el destino más probable dado } R \text{ es el 3.}$
--