

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función es $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, cuyo dominio es $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Para estudiar las asíntotas, calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

Por ello, $x = 1$ es una asíntota vertical. En $x \rightarrow 0^+$ la función tiene límite finito, así que no hay asíntota vertical allí. En $+\infty$ no hay asíntota horizontal porque la función crece sin cota. Comprobamos si existe una oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

Al no ser finito n , tampoco hay asíntota oblicua.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

En $x = e$, $f(e) = e$ y $f'(e) = 0$. La recta tangente tiene pendiente nula y la normal es perpendicular a ella:

$$\boxed{\text{Tangente: } y = e}, \quad \boxed{\text{Normal: } x = e}.$$

Opción A - Ejercicio 2

La primitiva se obtiene integrando $g(x) = 1/(x + \sqrt{x})$. Usamos el cambio sugerido $t = \sqrt{x}$, de modo que $x = t^2$ y $dx = 2t dt$:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2t}{t^2 + t} dt = 2 \int \frac{dt}{t + 1} = 2 \ln(t + 1) + C = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

La gráfica de la primitiva debe pasar por $P(1, 0)$, por lo que

$$0 = 2 \ln 2 + C \implies C = -2 \ln 2.$$

La función pedida es $\boxed{F(x) = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{2} \right)}$, para $x > 0$.

Opción A - Ejercicio 3

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$A_m = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A_m = 2(2m-1)(m-1).$$

Si $m \neq 1, \frac{1}{2}$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A_m) = 3$.

Para $m = 1$, el sistema queda

$$-2x + y - 3z = 1, \quad -x + y - z = 1, \quad x + 2z = 0.$$

De la tercera ecuación, $x = -2z$; la segunda da $y = 1 - z$. Al sustituir estos valores en la primera, se obtiene una identidad. Así, $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_1^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Tomando $z = t$,

$$(x, y, z) = (-2t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $m = \frac{1}{2}$, la segunda ecuación tiene el mismo lado izquierdo que la mitad del primero, pero su término independiente no es la mitad: $1 \neq \frac{1}{2}$. Por tanto, $\text{rg}(A_{1/2}) = 2$ y $\text{rg}(A_{1/2}^*) = 3$, y el sistema es incompatible. Queda discutido el sistema para todos los valores de m .

Opción A - Ejercicio 4

Primero obtenemos el plano π que contiene a A, B, C . Dos vectores contenidos en él son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -2, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 0, -1).$$

Su producto vectorial es un vector normal: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 0, 4) \sim (1, 0, 2)$. Al pasar por $A(1, 2, 1)$, el plano es $x + 2z - 3 = 0$.

Si A y B son simétricos respecto de la recta r , esta recta pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a AB . El punto medio es

$$M = \left(\frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2}, \frac{1 + 2}{2} \right) = \left(0, 1, \frac{3}{2} \right).$$

Un vector director de r debe ser perpendicular tanto a $\overrightarrow{AB}$ como al normal del plano; podemos tomar

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} \times (1, 0, 2) = (-4, 5, 2).$$

Por tanto, en forma paramétrica,

$$r: \quad x = -4t, \quad y = 1 + 5t, \quad z = \frac{3}{2} + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La perpendicular desde A a r pasa por el punto medio M , así que la distancia de A a r es la mitad de $|AB|$. Como $|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$,

$$d(A, r) = \frac{3}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La expresión es $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$, definida para $x \neq a$ y $x \neq \frac{1}{2}$. Como la gráfica pasa por $(0, 2)$,

$$2 = f(0) = \frac{k}{(-a)(-1)} = \frac{k}{a}, \quad k = 2a.$$

La asíntota vertical $x = 2$ exige que el denominador se anule en $x = 2$, luego $a = 2$. La relación anterior da $k = 4$.

Para estos valores, $f(x) = 4/((x-2)(2x-1))$. Su dominio excluye $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$. Derivamos para localizar los posibles extremos:

$$f'(x) = \frac{4(5-4x)}{((x-2)(2x-1))^2}.$$

El denominador es positivo en todo el dominio y la derivada se anula en $x = \frac{5}{4}$. Es positiva si $x < \frac{5}{4}$ y negativa si $x > \frac{5}{4}$. Teniendo en cuenta los puntos excluidos, la función crece en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$, y decrece en $(\frac{5}{4}, 2)$ y $(2, +\infty)$. En $x = \frac{5}{4}$ cambia de creciente a decreciente, así que hay un máximo relativo:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{32}{9}, \quad \boxed{\left(\frac{5}{4}, -\frac{32}{9}\right) \text{ es máximo relativo.}}$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos por partes con $u = x$ y $dv = \sin(2x) dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -\frac{1}{2} \cos(2x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx &= \left[-\frac{x}{2} \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4} \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

De $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$, multiplicamos la segunda igualdad por 2 y restamos la primera:

$$-5Y = 2B - A \implies Y = \frac{A - 2B}{5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $X = B + 3Y$, de donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar Z , despejamos el producto ZA y calculamos cada matriz por separado:

$$ZA = 3I - B^2 - B^t, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$ZA = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Multiplicamos por A^{-1} por la derecha:

$$Z = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta s es la intersección de $x + y = 1$ y $z = 5$. Por tanto, pasa por $Q = (0, 1, 5)$ y tiene vector director $\vec{v}_s = (1, -1, 0)$. La recta r pasa por $P = (2, 3, 0)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (-3, 5, 1)$.

Los vectores directores no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Si se cortaran, la coordenada z obligaría a que $\lambda = 5$ en r ; entonces se obtiene $(-13, 28, 5)$, que no verifica $x + y = 1$. No se cortan y, al no ser paralelas, son rectas cruzadas.

La distancia entre rectas cruzadas se calcula con

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)|}{\|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\|}.$$

Aquí,

$$Q - P = (-2, -2, 5), \quad \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1, 1, -2),$$

por lo que

$$d(r, s) = \frac{|(-2, -2, 5) \cdot (1, 1, -2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{7\sqrt{6}}{3}}.$$