

Modelo 1 de 2002

Funciones, áreas, sistemas de precios, geometría espacial, integrales y matrices.

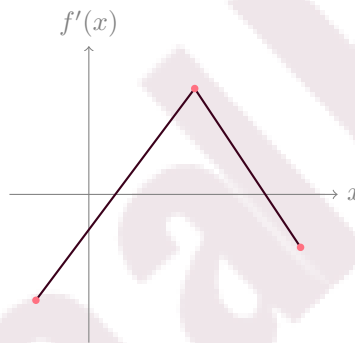
Opción A - Ejercicio 1

El denominador $x(\ln x)^2$ exige $x > 0$ y $\ln x \neq 0$. Por tanto, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Para hallar una primitiva usamos el cambio indicado $t = \ln x$, de modo que $dt = dx/x$:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Opción A - Ejercicio 2

El signo de f' determina el crecimiento. Según la gráfica, f' une linealmente $(-1, -2)$ con $(2, 2)$ y $(2, 2)$ con $(4, -1)$. En el primer tramo, la recta corta el eje x en $x = 1/2$; en el segundo, lo corta en $x = 10/3$. Así, $f' < 0$ en $(-1, 1/2)$, $f' > 0$ en $(1/2, 10/3)$ y $f' < 0$ en $(10/3, 4)$. Por ello, f decrece, crece y vuelve a decrecer en esos intervalos: tiene un mínimo relativo en $x = 1/2$ y un máximo relativo en $x = 10/3$. La pendiente de la gráfica de f' es f'' . Es positiva entre -1 y 2 , y negativa entre 2 y 4 . Por tanto, f es convexa en $(-1, 2)$ y cóncava en $(2, 4)$; en $x = 2$ cambia la concavidad, así que hay un punto de inflexión.



Opción A - Ejercicio 3

Sean A, B, C los precios en euros. Traducimos las condiciones a un sistema:

$$A = \frac{B+C}{2} - 0.06, \quad B = \frac{A+C}{2}, \quad C = 2 + \frac{2}{5}A + \frac{1}{3}B.$$

De la segunda ecuación, $C = 2B - A$. Al sustituir en la primera queda $A = B - 1/25$, luego $B = A + 1/25$ y $C = A + 2/25$. La tercera ecuación se convierte en

$$A + \frac{2}{25} = 2 + \frac{2}{5}A + \frac{1}{3} \left(A + \frac{1}{25} \right) \implies A = \frac{29}{4}.$$

Por tanto,

$$A = \frac{29}{4} = 7.25 \text{ €}, \quad B = \frac{729}{100} = 7.29 \text{ €}, \quad C = \frac{733}{100} = 7.33 \text{ €}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Calculamos los vectores de dos lados consecutivos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, 0), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (0, 0, -3).$$

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, los lados son perpendiculares. Los tres puntos son distintos y no alineados, así que pueden ser vértices consecutivos de un rectángulo. Para que $ABCD$ sea un paralelogramo, sus diagonales tienen el mismo punto medio, de donde $D = A + C - B$. Así,

$$D = A + C - B = (1, -3, -1).$$

Opción B - Ejercicio 1

La abscisa del punto de inflexión se obtiene con $f''(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + c, \quad f''(x) = 6x + 6 = 0 \implies x = -1.$$

La pendiente de la tangente en ese punto debe ser 3, la pendiente de $y = 3x + 4$. Por tanto, $f'(-1) = c - 3 = 3$ y $c = 6$. El punto de tangencia tiene ordenada $3(-1) + 4 = 1$; además, $f(-1) = d - 4$. Igualando, $d = 5$. La función es

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 5, \quad c = 6, d = 5.$$

Opción B - Ejercicio 2

Dividimos el numerador entre el denominador y después descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = x + 2 + \frac{-x + 5}{(x - 1)(x + 1)} = x + 2 + \frac{2}{x - 1} - \frac{3}{x + 1}.$$

Integramos término a término. En los logaritmos usamos valores absolutos porque el dominio excluye $x = \pm 1$:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x - 1| - 3 \ln |x + 1| + C.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz A intercambia la primera y la tercera coordenadas, por lo que $A^2 = I$ y $A^{-1} = A$. En consecuencia, $A^{127} = A$ (exponente impar) y $A^{128} = I$ (exponente par). Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{127} = A, \quad A^{128} = I.$$

Para imponer $AB = BA$, calculamos

$$AB = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

La igualdad de las entradas correspondientes exige $x = 0, y = 1$. **Opción B - Ejercicio 4**

Los vectores directores de AB y CD son $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{CD} = D - C = (0, -1, -1)$. Un vector normal al plano buscado debe ser perpendicular a ambos; su producto vectorial es $(0, 1, -1)$. Al usar $A = (1, 1, 1)$, la ecuación del plano es $y - z = 0$. La recta CD se parametriza como $(1, 1 - t, -t)$, donde $y - z = 1$; por eso no corta el plano. Los puntos medios son $M_{AB} = (3/2, 3/2, 3/2)$ y $M_{CD} = (1, 1/2, 0)$. La recta que los une tiene dirección proporcional a $(1, 2, 3)$ y se expresa en forma paramétrica:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) + t(1, 2, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$