

Julio de 2025 · Convocatoria extraordinaria de reserva

La pregunta 1 es obligatoria. En las preguntas 2, 3 y 4 se desarrollan las dos alternativas, aunque en el examen solo hay que contestar una de cada pregunta.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

La tabla clasifica a los 120 miembros por edad y preferencia. Sumamos las filas y columnas para identificar los grupos que se usarán:

Edad	Novela	Poesía	Teatro	Ensayo	Total
< 25	17	6	7	1	31
25–60	22	17	10	3	52
> 60	8	12	11	6	37
Total	47	35	28	10	120

1.1 · Preferencia distinta del ensayo

Hay 10 personas que prefieren ensayo. El suceso contrario, «no prefiere ensayo», incluye las otras $120 - 10 = 110$ personas.

$$P(\text{no ensayo}) = \frac{110}{120} = \frac{11}{12} \approx 0.9167.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{11}{12}$, aproximadamente un 91.67 %.

1.2 · Tener al menos 25 años, sabiendo que no prefiere poesía

De las 120 personas, 35 prefieren poesía; por tanto, $120 - 35 = 85$ no la prefieren. Entre las personas de 25 años o más, las que no prefieren poesía son

$$(22 + 10 + 3) + (8 + 11 + 6) = 35 + 25 = 60.$$

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\text{edad} \geq 25 \mid \text{no poesía}) = \frac{P(\text{edad} \geq 25 \cap \text{no poesía})}{P(\text{no poesía})} = \frac{60}{85} = \frac{12}{17} \approx 0.7059.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{12}{17}$, aproximadamente un 70.59 %.

1.3 · Como mucho 3 preferencias de teatro o ensayo entre 10 personas

En la franja de 25 a 60 años hay 52 personas. De ellas, $10 + 3 = 13$ prefieren teatro o ensayo y $52 - 13 = 39$ prefieren otro tipo de obra. Al escoger 10 personas distintas de ese grupo, contamos casos sin reemplazo. Por eso el modelo exacto es hipergeométrico.

Sea X el número, entre las 10 personas elegidas, que prefieren teatro o ensayo. Entonces X puede tomar valores entre 0 y 10, con $N = 52$, $K = 13$ casos favorables en el grupo y $n = 10$ personas escogidas:

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(52, 13, 10).$$

La probabilidad de obtener exactamente k personas con esa preferencia es el número de formas de escoger k de las 13 favorables y $10 - k$ de las 39 restantes, dividido entre todas las formas de escoger 10 de 52:

$$P(X = k) = \frac{\binom{13}{k} \binom{39}{10-k}}{\binom{52}{10}}.$$

«Como mucho 3» significa $X \leq 3$, es decir, sumar los casos $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= \sum_{k=0}^3 \frac{\binom{13}{k} \binom{39}{10-k}}{\binom{52}{10}} \\ &= \frac{\binom{13}{0} \binom{39}{10} + \binom{13}{1} \binom{39}{9} + \binom{13}{2} \binom{39}{8} + \binom{13}{3} \binom{39}{7}}{\binom{52}{10}} \\ &= \frac{12\,588\,442\,438}{15\,820\,024\,220} = \frac{2\,589\,149}{3\,253\,810} \approx 0.7957. \end{aligned}$$

Conclusión. Si se eligen 10 personas distintas de la franja, la probabilidad es aproximadamente **0.7957**, un **79.57 %**.

Pregunta 2 · Álgebra

2.1 · Matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 · Resolver $2AX = BX + I$

Agrupamos los términos que contienen X por la derecha:

$$2AX = BX + I \implies 2AX - BX = I \implies (2A - B)X = I.$$

Si $2A - B$ es invertible, multiplicamos a la izquierda por su inversa:

$$X = (2A - B)^{-1}.$$

Calculamos primero esa matriz y su determinante:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \det(2A - B) = (-1)(-2) - 1(-1) = 3 \neq 0.$$

Para una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se usa

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sustituimos los cuatro elementos de $2A - B$:

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

2.1.2 · Encontrar α en $4A^2 + \alpha A - I = O$

Calculamos la potencia antes de sustituirla:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}I.$$

Entonces $4A^2 = I$, y la ecuación queda

$$4A^2 + \alpha A - I = O \iff I + \alpha A - I = O \iff \alpha A = O.$$

La matriz A no es nula; por ejemplo, su elemento de la primera fila y primera columna es $\frac{1}{2}$. De esa entrada resulta $\frac{\alpha}{2} = 0$.

Conclusión. El único valor es $\boxed{\alpha = 0}$.

2.1.3 · Calcular A^{12}

Ya hemos obtenido $A^2 = \frac{1}{4}I$. Para mostrar cómo se aprovecha esa potencia:

$$A^3 = A^2 A = \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, A^6 = (A^2)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 I = \frac{1}{64}I.$$

Así,

$$A^{12} = (A^6)^2 = \left(\frac{1}{64}\right)^2 I = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}}.$$

Las potencias son escalares de I ; no se trata de una matriz cíclica que vuelva a la identidad.

2.2 · Discusión del sistema mediante Rouché-Frobenius

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a, \\ (1 + a)x + 2y + z = a, \\ ax - y + z = 1 - a. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes A y la ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 - a \\ 1 + a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1 - a \end{pmatrix}.$$

Hay $n = 3$ incógnitas. El criterio de Rouché-Frobenius dice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 &\implies \text{SCD}, \\ \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) < 3 &\implies \text{SCI}, \\ \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*) &\implies \text{SI}. \end{aligned}$$

Determinante y caso general

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \Delta = \det A &= 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 + a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 + a & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(2 + 1) - ((1 + a) - a) + 2(-(1 + a) - 2a) \\ &= 9 - 1 - 2 - 6a = 6(1 - a). \end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, $\Delta \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = 3$. Como A^* tiene solo 3 filas, su rango no puede superar 3; además contiene a A , así que $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 = n,$$

y el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso singular $a = 1$

Sustituimos el parámetro en las dos matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A_1 es cero. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0,$$

por lo que $\operatorname{rg}(A_1) \geq 2$; al ser $\det A_1 = 0$, su rango es exactamente 2. Para la ampliada comprobamos el menor de orden 3 formado por las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0.$$

Así, $\operatorname{rg}(A_1^*) = 3$. Como los rangos son distintos, el sistema es **incompatible (SI)**. No hay ningún caso SCI.

Discusión final. Si $a \neq 1$, el sistema es SCD; si $a = 1$, es SI.

Solución cuando $a \neq 1$

Usamos la regla de Cramer. Los determinantes de las matrices que se obtienen al sustituir cada columna por los términos independientes son

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3a,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1-a & 2 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & 1 \end{vmatrix} = -4a^2 + 7a - 2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ a & -1 & 1-a \end{vmatrix} = 5a^2 - 5a + 4.$$

Como $\Delta = 6(1-a) \neq 0$:

$$x = \frac{-3a}{6(1-a)} = \frac{a}{2a-2}, y = \frac{-4a^2 + 7a - 2}{6(1-a)}, z = \frac{5a^2 - 5a + 4}{6(1-a)}.$$

Pregunta 3 · Geometría

3.1 · Planos perpendiculares y planos paralelos

El plano dado es $\pi : 2x - z = 1$; su normal es $\vec{n}_\pi = (2, 0, -1)$. La recta viene como intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0, \\ z = y. \end{cases}$$

Pasamos a forma paramétrica. Tomamos $x = t$; entonces $y = 2t$ y $z = 2t$:

$$r : x = 0 + t, y = 0 + 2t, z = 0 + 2t, t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $O = (0, 0, 0)$ es un punto de la recta y $\vec{v} = (1, 2, 2)$ es su vector director.

3.1.1 · Plano perpendicular a π que contiene a r

Sea σ el plano buscado y $\vec{n}_\sigma$ su normal. Como σ contiene la dirección $\vec{v}$, se debe cumplir $\vec{n}_\sigma \cdot \vec{v} = 0$. Además, $\sigma \perp \pi$, así que $\vec{n}_\sigma \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Calculamos un vector que cumpla ambas condiciones con el producto vectorial:

$$\vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2, -5, 4).$$

Comprobamos:

$$(2, -5, 4) \cdot (1, 2, 2) = 2 - 10 + 8 = 0, (2, -5, 4) \cdot (2, 0, -1) = 4 - 4 = 0.$$

El plano pasa por O y tiene normal $(2, -5, 4)$, por lo que su ecuación general es

$$\sigma : 2x - 5y + 4z = 0.$$

3.1.2 · Planos paralelos a π a distancia 2 de P

Todo plano paralelo a π tiene la misma normal y se escribe en forma general

$$\gamma : 2x - z + D = 0.$$

La distancia de $P = (0, 1, 2)$ a este plano es

$$d(P, \gamma) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|D - 2|}{\sqrt{5}}.$$

La distancia debe ser 2:

$$\frac{|D - 2|}{\sqrt{5}} = 2 \implies |D - 2| = 2\sqrt{5} \implies D = 2 \pm 2\sqrt{5}.$$

Conclusión. Los dos planos son

$$2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0, \quad 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0.$$

3.2 · Pertenencia, distancia y proyección

Se da $\pi : 2x + 3y - z = 0$, junto con

$$A = (0, 0, 0), B = (10, 0, -20), C = (0, 15, -30), D = (1, 2, -1).$$

3.2.1 · Comprobar si ABC está contenido en π

Un triángulo está contenido en un plano si lo están sus tres vértices. Sustituimos cada punto en $2x + 3y - z$:

Punto	$2x + 3y - z$	¿Pertenece a π ?
A	$(0) + 0 - 0 = 0$	Sí
B	$2(10) + 0 - (-20) = 40$	No
C	$0 + 3(15) - (-30) = 75$	No

Conclusión. Como B y C no pertenecen a π , el triángulo ABC no está contenido en ese plano.

3.2.2 · Distancia de D a π

La distancia de (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos $D = (1, 2, -1)$ y $\pi : 2x + 3y - z = 0$:

$$d(D, \pi) = \frac{|2(1) + 3(2) - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

3.2.3 · Proyección ortogonal de D sobre el plano ABC

El plano ABC pasa por $A = (0, 0, 0)$. Dos vectores directores son

$$\overrightarrow{AB} = (10, 0, -20), \overrightarrow{AC} = (0, 15, -30).$$

Su producto vectorial es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (300, 300, 150) = 150(2, 2, 1).$$

Por tanto, una normal es $\vec{n} = (2, 2, 1)$, y la ecuación general del plano es

$$\sigma : 2x + 2y + z = 0.$$

La recta perpendicular a σ que pasa por D tiene como dirección $\vec{n}$. La escribimos en forma paramétrica:

$$s : x = 1 + 2\lambda, y = 2 + 2\lambda, z = -1 + \lambda.$$

El punto de proyección es la intersección de s y σ . Sustituimos:

$$2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \implies 5 + 9\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{5}{9}.$$

Reemplazando ese valor en las tres coordenadas:

$$H = \left(1 - \frac{10}{9}, 2 - \frac{10}{9}, -1 - \frac{5}{9}\right) = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right).$$

Pregunta 4 · Análisis

4.1 · Estudio de $f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$

4.1.1 · Dominio, asíntotas y monotonía

Dominio. El denominador no puede ser cero:

$$9 - x^2 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$$

Se excluyen esos dos valores:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Derivada y puntos críticos. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (9 - x^2) - x(-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 + x^2}{(9 - x^2)^2}.$$

El numerador $x^2 + 9$ es positivo para todo real, pues $x^2 \geq 0$. El denominador es un cuadrado y solo se anula en $x = \pm 3$, que no pertenecen al dominio. Así, $f'(x) > 0$ en todo su dominio. La ecuación $x^2 + 9 = 0$ no tiene soluciones reales; no hay puntos críticos interiores. Los puntos $x = \pm 3$ son huecos del dominio, no extremos.

Comprobamos el signo en cada intervalo del dominio:

Intervalo	Prueba	f' (prueba)	Signo
$(-\infty, -3)$	-4	25/49	+
$(-3, 3)$	0	1/9	+
$(3, +\infty)$	4	25/49	+

Conclusión de monotonía. La función crece en $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, +\infty)$. No decrece en ningún intervalo de su dominio y no tiene máximos ni mínimos locales.

Asíntotas verticales. Comprobamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{9 - x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{9 - x^2} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{9 - x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{9 - x^2} &= -\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

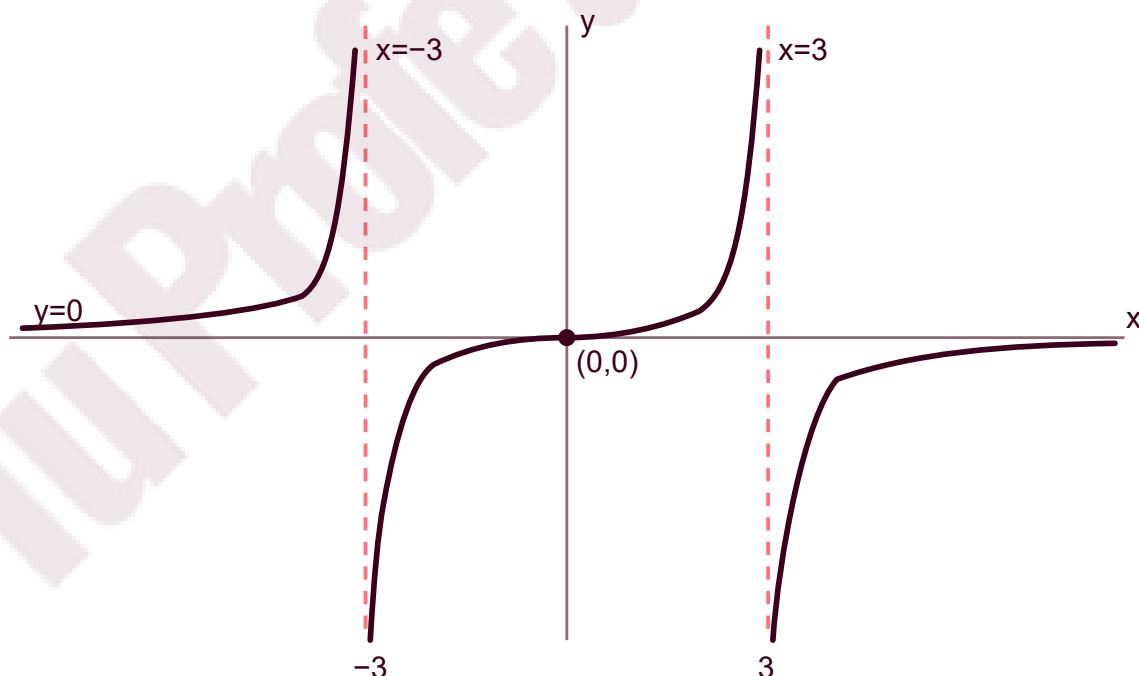
Asíntota horizontal. Para $x \rightarrow \pm\infty$, dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/x}{9/x^2 - 1} = 0.$$

La asíntota horizontal es $y = 0$. No hay asíntota oblicua porque ya existe una horizontal en ambos extremos.

4.1.2 · Representación de la curva

La función corta ambos ejes en $(0, 0)$. Además, $f(x) > 0$ si $x < -3$ o $0 < x < 3$, y $f(x) < 0$ si $-3 < x < 0$ o $x > 3$. La gráfica siguiente se ha construido para esta solución; las líneas discontinuas indican las asíntotas verticales.



4.1.3 · Todas las primitivas

Usamos la sustitución $u = 9 - x^2$, de modo que $du = -2x dx$ y $x dx = -\frac{1}{2} du$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{9-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |u| + C \\
 &= \boxed{-\frac{1}{2} \ln |9-x^2| + C}.
 \end{aligned}$$

La constante C es arbitraria; la fórmula vale en cada intervalo del dominio.

4.1.4 · Área entre la curva y el eje de abscisas de -1 a 1

En $[-1, 0]$, $f(x) \leq 0$; en $[0, 1]$, $f(x) \geq 0$. Por eso sumamos el área situada bajo el eje, cambiándole el signo, y el área sobre el eje:

$$A = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$$

La primitiva es $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(9-x^2)$ en estos intervalos. Evaluamos cada integral con sus límites escritos junto al corchete:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\left[-\frac{1}{2} \ln(9-x^2)\right]_{-1}^0 = -\left(-\frac{1}{2} \ln 9 + \frac{1}{2} \ln 8\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}, \\
 A_2 &= \left[-\frac{1}{2} \ln(9-x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 9 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}.
 \end{aligned}$$

Sumamos las dos partes:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} = \boxed{\ln \frac{9}{8} \approx 0.1173}.$$

4.2 · Bote cilíndrico de volumen 33 cm^3

Llamamos $r > 0$ al radio de la base, en centímetros, y $h > 0$ a la altura, también en centímetros.

4.2.1 · Área total en función del radio y la altura

El área suma la superficie lateral y las dos tapas, mientras que el volumen debe ser 33 cm^3 :

$$\begin{aligned}S &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \text{ (cm}^2\text{)}, \\V &= \pi r^2 h = 33 \text{ (cm}^3\text{)}.\end{aligned}$$

4.2.2 · Dimensiones de área mínima

Despejamos h del volumen y sustituimos en S , para expresar el área con una sola variable. Después derivamos e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}h &= \frac{33}{\pi r^2}, \\S(r) &= 2\pi r \left(\frac{33}{\pi r^2} \right) + 2\pi r^2 = \frac{66}{r} + 2\pi r^2, \quad r > 0, \\S'(r) &= -\frac{66}{r^2} + 4\pi r = 0 \iff 4\pi r^3 = 66 \iff r^3 = \frac{33}{2\pi}.\end{aligned}$$

Como $r > 0$, el radio crítico es $r_0 = \sqrt[3]{33/(2\pi)} \approx 1.7382 \text{ cm}$. Para estudiar el signo, escribimos

$$S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 66}{r^2}.$$

El denominador es positivo. El numerador es negativo si $0 < r < r_0$ y positivo si $r > r_0$; por tanto, S decrece hasta r_0 y crece después. Así, r_0 es el mínimo absoluto.

Calculamos la altura sustituyendo el radio en la restricción. De $r_0^3 = 33/(2\pi)$ se obtiene $2\pi r_0^3 = 33$, y entonces

$$h_0 = \frac{33}{\pi r_0^2} = 2r_0 = 2\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \approx 3.4765 \text{ cm}.$$

4.2.3 · Área mínima

Como $h_0 = 2r_0$, el área mínima es

$$\begin{aligned}S_{\min} &= 2\pi r_0 h_0 + 2\pi r_0^2 \\&= 2\pi r_0(2r_0) + 2\pi r_0^2 = 6\pi r_0^2 \\&= 6\pi \left(\frac{33}{2\pi} \right)^{2/3} \approx \boxed{56.9539 \text{ cm}^2}.\end{aligned}$$