

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es el doble de la distancia de A a B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad que B.

Solución:

Utilizamos las siguientes notaciones,

$P_{M,N}$ = precio del billete de la ciudad M a la N

$d_{M,N}$ = distancia de la ciudad M a la N

Con esta notación y considerando la primera frase del enunciado del problema tenemos: $P_{M,N} = f + k d_{M,N}$

En relación a las ciudades indicadas en el enunciado los datos del problema los podemos resumir como sigue (siendo D la población que dista de A la mitad que B):

$$P_{A,B} = 20 \quad P_{A,C} = 32 \quad d_{A,B} = x \quad d_{A,C} = 2x \quad P_{A,D} = ? \quad d_{A,D} = x/2$$

$P_{A,D} = f + k d_{A,D} = f + k x/2$. Para resolver el problema necesitamos conocer los valores de “f” y de “k x”.

Los datos del problema se transforman en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} P_{A,B} = f + k d_{A,B} \\ P_{A,C} = f + k d_{A,C} \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = f + k x \\ 32 = f + k 2x \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = f + k x \\ 32 = f + 2k x \end{cases} \quad \text{Resolvemos este sistema por reducción.}$$

1º) Multiplicamos la 1ª ecuación por -1

$$\begin{cases} -20 = -f - k x \\ 32 = f + 2k x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando ambas} \\ \text{ecuaciones} \end{array} \quad 12 = k x$$

2º) Multiplicamos la 1ª ecuación por -2

$$\begin{cases} -40 = -2f - 2k x \\ 32 = f + 2k x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando ambas} \\ \text{ecuaciones} \end{array} \quad \begin{array}{l} -8 = -f \\ \text{Por lo que } f = 8 \end{array}$$

Por lo tanto: $P_{A,D} = f + k x/2 = 8 + 12/2 = 8 + 6 = 14$

Es decir, por un billete a una población que dista de A la mitad que B habrá que pagar 14 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una empresa dispone de un máximo de 16000 unidades de un producto que puede vender en unidades sueltas o en lotes de cuatro unidades. Para empaquetar un lote de cuatro unidades se necesita el triple de material que para empaquetar una unidad suelta. Si se dispone de material para empaquetar 15000 unidades sueltas, y si el beneficio que se obtiene por la venta de cada unidad suelta es de 2 € y de cada lote de cuatro unidades es de 7 €, calcular de forma razonada el número de unidades sueltas y de lotes de cuatro unidades que hay que preparar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Solución:

Las incógnitas a utilizar son: $x = \text{n}^\circ \text{ de unidades sueltas}$
 $y = \text{n}^\circ \text{ de lotes de cuatro unidades}$

Las restricciones del problema son:

dispone de un máximo de 16000 unidades: $x + 4y \leq 16000$

dispone de material para 15000 unidades: $x + 3y \leq 15000$

El beneficio que se obtiene es: $2x + 7y$

El problema de programación lineal a resolver es:

maximizar $z = 2x + 7y$

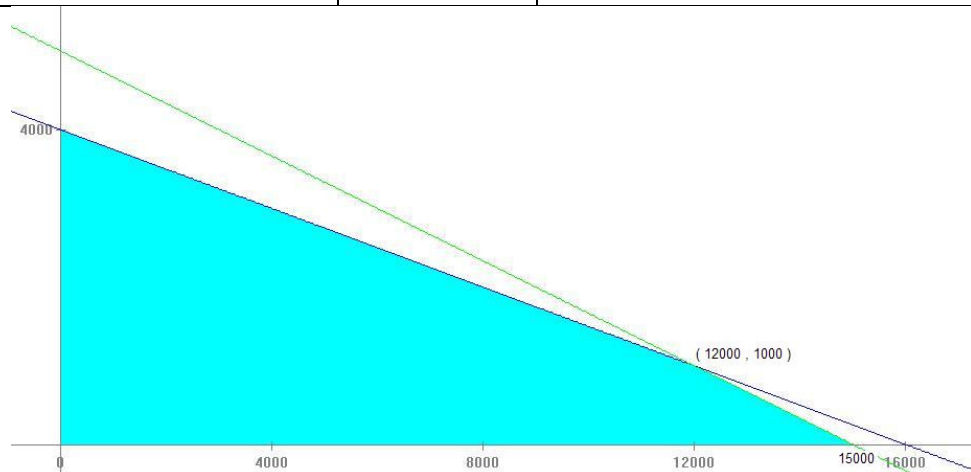
s.a. $x + 4y \leq 16000$

$x + 3y \leq 15000$

$x, y \in \mathbb{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + 4y \leq 16000$ representación de $x + 4y = 16000$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>4000</td> </tr> <tr> <td>16000</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> (0,0) ¿cumple la restricción? SÍ $0 + 4 \cdot 0 \leq 16000$ $0 \leq 16000$ sí		x	y	0	4000	16000	0
x	y						
0	4000						
16000	0						
$x + 3y \leq 15000$ representación de $x + 3y = 15000$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>5000</td> </tr> <tr> <td>15000</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> (0,0) ¿cumple la restricción? SÍ $0 + 3 \cdot 0 \leq 15000$ $0 \leq 15000$ sí		x	y	0	5000	15000	0
x	y						
0	5000						
15000	0						
Cálculo del punto de corte de las dos rectas, (12000 , 1000),							
$\begin{cases} x + 4y = 16000 \\ x + 3y = 15000 \end{cases}$	Restando: $y = 1000$ Sustituyendo en 2ª ecuación $x + 3 \cdot 1000 = 15000$ $x + 3000 = 15000 \rightarrow x = 12000$						



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 2x + 7y$		Para obtener el máximo beneficio hay que preparar 1200 unidades sueltas y 1000 lotes de cuatro unidades. El beneficio será de 31000 €
$(0,0)$	0		
$(0,4000)$	28000		
$(1200,1000)$	$2 \cdot 1200 + 7 \cdot 1000 = 31000$	máximo	
$(15000,0)$	$2 \cdot 15000 + 7 \cdot 0 = 30000$		

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 800$$

Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Solución:

El coste total de producir x litros es $C(x)$, por lo tanto el coste medio por litro producido será:

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 5x + 800}{x} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{800}{x}$$

Debemos calcular x de manera que $CM(x)$ sea mínimo,

$$CM'(x) = \frac{1}{2} + 0 - \frac{800}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{800}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{800}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{800}{x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = 1600 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1600} = \pm 40$$

como x representa los litros producidos no tiene sentido la solución negativa, luego $x = 40$

$$CM''(x) = \frac{1600}{x^3}, \quad CM''(40) = \frac{1600}{40^3} > 0$$

para $x = 40$ se alcanza un mínimo relativo en $(40, 45)$.

(para $x=40$ $CM(40)=20+5+20=45$)

Veamos si es el mínimo absoluto, para ello debemos representar gráficamente la función $CM(x)$

$$CM(x) = \frac{x}{2} + 5 + \frac{800}{x} = \frac{x^2 + 10x + 1600}{2x}$$

como x representa los litros producidos, $x \geq 0$

a) Dom $CM = (0, +\infty)$

b) Asíntotas :

AV $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 10x + 1600}{2x} \right) = \frac{1600}{0} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es AV}$$

para $x > 0$ num. y den. son positivos $\rightarrow$ el lím. es positivo

AH no hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 10x + 1600}{2x} \right) = \infty \text{ porque } \text{grad}(\text{num}) > \text{grad}(\text{deno})$$

AO $y = \frac{1}{2}x + 5$

como $\text{grad}(\text{numerador}) - \text{grad}(\text{denominador}) = 2 - 1 = 1$, hay asíntota oblicua.

Efectuamos la división polinómica,

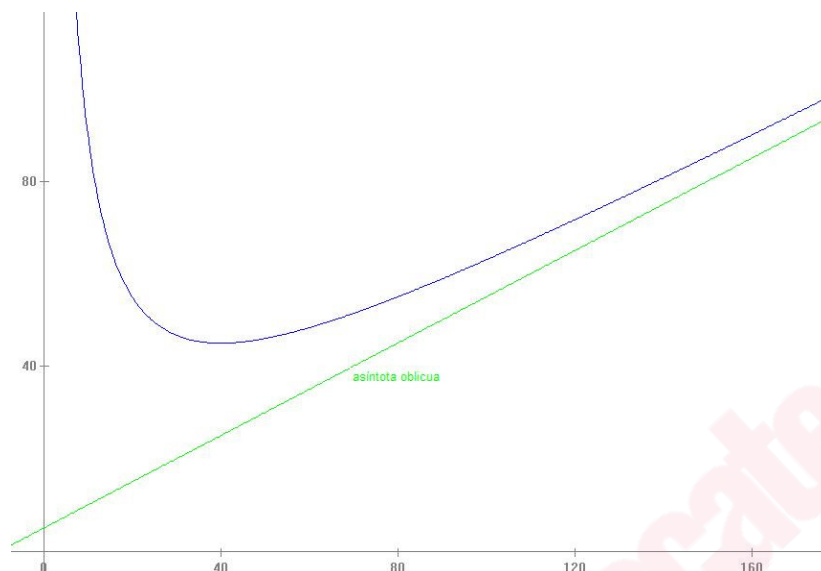
$$\begin{array}{r} x^2 + 10x + 1600 \mid 2x \\ -x^2 \\ \hline + 10x \\ -10x \\ \hline + 1600 \end{array}$$

Veamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua,

$$\frac{x^2 + 10x + 1600}{2x} = \left(\frac{1}{2}x + 5\right) + \frac{1600}{2x}$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1600}{2x} > 0 \Rightarrow$ la función está por encima de la asíntota.

Con la información del mínimo relativo y la posición de la curva respecto de sus asíntotas podemos trazar un esbozo de la función:



Luego el mínimo relativo es un mínimo absoluto. Por ello el coste medio será mínimo con una producción de 40 litros y este coste será de 45 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un ordenador personal tiene cargados dos programas antivirus A_1 y A_2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A_1 lo detecta con una probabilidad de 0'9 y el programa A_2 lo detecta con una probabilidad de 0'8. Calcular de forma razonada:

- La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.
- La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A_1 y no por A_2 .

Solución:

Nombramos los siguientes sucesos:

$D_1 = \text{el programa } A_1 \text{ detecta el virus}$	$p(D_1) = 0'9$
$D_1' = \text{el programa } A_1 \text{ no detecta el virus}$	$p(D_1') = 0'1$
$D_2 = \text{el programa } A_2 \text{ detecta el virus}$	$p(D_2) = 0'8$
$D_2' = \text{el programa } A_2 \text{ no detecta el virus}$	$p(D_2') = 0'2$

Ante la presencia de un virus los sucesos que pueden ocurrir son:

$$\begin{aligned} &D_1 \cap D_2 \\ &D_1 \cap D_2' \\ &D_1' \cap D_2 \\ &D_1' \cap D_2' \end{aligned}$$

Como los antivirus A_1 y A_2 actúan simultánea e independientemente $p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \cdot p(D_2)$ y análogamente con los otros sucesos.

- a) *Sea $D = \text{un virus es detectado}$*

*Un virus es detectado cuando lo detecta cualquiera de los dos programas,
por lo tanto $D = (D_1' \cap D_2')'$*

$$p(D) = p((D_1' \cap D_2')') = 1 - p(D_1' \cap D_2') = 1 - p(D_1') \cdot p(D_2') = 1 - 0'1 \cdot 0'2 = 1 - 0'02 = 0'98$$

- b) *La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A_1 y no por A_2 la calculamos mediante $p(D_1 \cap D_2')$*

$$p(D_1 \cap D_2') = p(D_1) \cdot p(D_2') = 0'9 \cdot 0'2 = 0'18$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dados los puntos del plano (1,1) y (3,-2), se pide: a) encontrar de forma razonada la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos, b) deducir si dicha recta es paralela o si corta a la recta de ecuación $3x + y = 5$, y c) en este último caso, calcular el punto de corte.

Solución:

Llamamos a los puntos $A(1,1)$ y $B(3,-2)$

a) Recta que pasa por ambos puntos.

La ecuación de una recta es de la forma $y = m x + n$. Para calcular los valores de m y n utilizamos los dos puntos A y B.

Como la recta pasa por $A(1,1) \rightarrow 1 = m \cdot 1 + n \rightarrow 1 = m + n$

Como la recta pasa por $B(3,-2) \rightarrow -2 = m \cdot 3 + n \rightarrow -2 = 3m + n$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas podemos resolver el sistema,

$$\begin{cases} 1 = m + n \\ -2 = 3m + n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicamos la} \\ \text{1ª ecuación por } -1 \end{array} \quad \begin{cases} -1 = -m - n \\ -2 = 3m + n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando ambas} \\ \text{ecuaciones} \end{array} \quad -3 = 2m \rightarrow m = \frac{-3}{2}$$

Sustituyendo el
valor de m en
la 1ª ecuación

$$1 = \frac{-3}{2} + n \rightarrow n = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

La ecuación de la recta será: $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$ quitando denominadores $2y = -3x + 5 \rightarrow 3x + 2y = 5$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $3x + 2y = 5$

b) Para ver si las rectas $3x + 2y = 5$ y $3x + y = 5$ son paralelas o se cortan resolvemos el sistema de ecuaciones formado por ellas,

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicamos la} \\ \text{2ª ecuación por } -1 \end{array} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -3x - y = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando ambas} \\ \text{ecuaciones} \end{array} \quad y = 0$$

Sustituyendo el valor de
 y en la 1ª ecuación

$$3x + 2 \cdot 0 = 5 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Como el sistema tiene solución las dos rectas se cortan.

c) Ambas rectas se cortan en el punto obtenido en el apartado anterior, es decir, $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Se pretende invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B ha de ser al menos de 3000 € y no se quiere invertir en A más del doble que en B. Se supone que A proporcionará un beneficio de 10% y B del 5%. Si se dispone de 12000 €, calcular de forma razonada cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio y determinar éste.

Solución:

Las incógnitas a utilizar son: $x =$ inversión en A
 $y =$ inversión en B

El beneficio es: $0'1x + 0'05y$

Las restricciones del problema son: “la inversión en B ha de ser al menos de 3000 €” $\rightarrow y \geq 3000$
 “no se quiere invertir en A más del doble que en B” $\rightarrow x \leq 2y$
 “se dispone de 12000 €” $\rightarrow x + y \leq 12000$

El problema de programación lineal a resolver es:

maximizar $z = 0'1x + 0'05y$

s.a. $y \geq 3000$

$x \leq 2y$

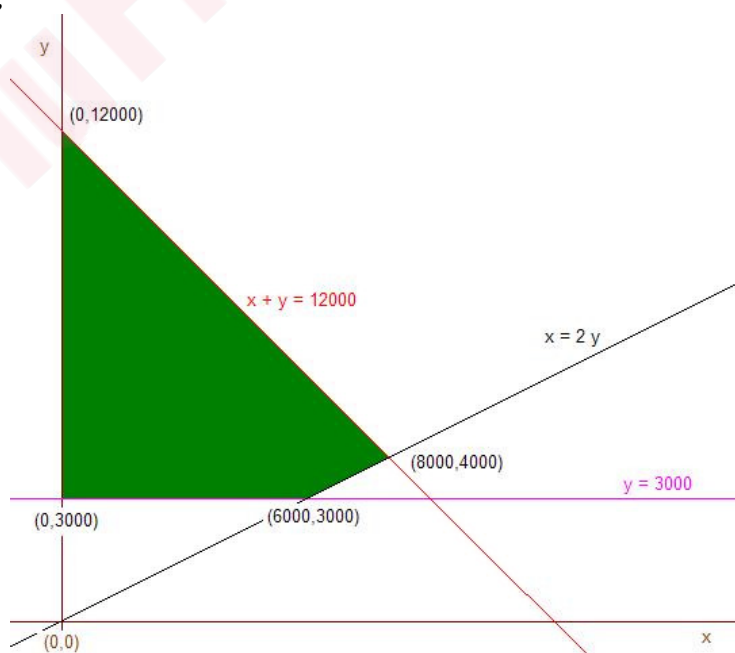
$x + y \leq 12000$

$x, y \geq 0$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$y \geq 3000$		$x \leq 2y$		$x + y \leq 12000$	
$y = 3000$		$x = 2y$		$x + y = 12000$	
x	y	x	y	x	y
0	3000	0	0	0	12000
1000	3000	2000	1000	12000	0
$(0,0)$ ¿cumple la restricción? No $0 \geq 3000$ No		$(1000,0)$ ¿cumple la restricción? No $1000 \leq 2 \cdot 0$ No		$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 12000$ Sí	

La representación gráfica es,



Calculemos los puntos de corte que faltan,

$\begin{cases} y = 3000 \\ x = 2y \end{cases}$	Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación, $x = 2 \cdot 3000 \rightarrow x = 6000$	El punto de corte es (6000, 3000)
--	--	--

$\begin{cases} x + y = 12000 \\ x = 2y \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación, $2y + y = 12000 \rightarrow 3y = 12000 \rightarrow y = 4000$ Sustituyendo este valor en la 2ª ecuación, $x = 2 \cdot 4000 \rightarrow x = 8000$	El punto de corte es (8000, 4000)
---	--	--

La región factible está formada por la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 0'1x + 0'05y$	
$(0,3000)$	150	
$(0,12000)$	600	
$(8000,4000)$	$800+200=1000$	máximo
$(6000,3000)$	$600+150=750$	

Para obtener un beneficio máximo se debe invertir 8000 € en el producto A y 4000 € en el producto B.

Con esta inversión el beneficio será de 1000 €

Tu Profecia al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La concentración C de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad durante los 20 primeros días de un determinado mes se puede aproximar por la función $C(x)=90+15x-0'6x^2$, donde x representa el tiempo transcurrido en días.

- Estudiar de forma razonada el crecimiento y decrecimiento de la concentración de ozono en relación con los días transcurridos.
- ¿Cuál es la concentración máxima de ozono alcanzada durante esos 20 días? Justificar la respuesta.

Solución:

La concentración C de ozono contaminante viene dada por la función,

$$C(x) = 90 + 15x - 0'6x^2 \quad x \in [0, 20]$$

Para responder las preguntas del problema estudiamos la monotonía de la función $y = 90 + 15x - 0'6x^2$

$$y' = 15 - 1'2x$$

$$15 - 1'2x = 0 \rightarrow 15 = 1'2x \rightarrow x = \frac{15}{1'2} = 12'5$$

Calculemos el signo de y' ,

x	y'
10	$15 - 0'12 \cdot 10 = 15 - 1'2 = 13'8 > 0$
200	$15 - 0'12 \cdot 200 = 15 - 24 = -9 < 0$

Por lo tanto y es creciente para $x < 12'5$ y decreciente para $x > 12'5$

- La concentración de ozono crece durante los doce primeros días y decrece a partir del día 13.
- La máxima concentración de ozono se alcanzará en el día 12 o 13, calculémoslo.

$$C(12) = 90 + 15 \cdot 12 - 0'6 \cdot 12^2 = 90 + 180 - 0'6 \cdot 144 = 270 - 86'4 = 183'6$$

$$C(13) = 90 + 15 \cdot 13 - 0'6 \cdot 13^2 = 90 + 195 - 0'6 \cdot 169 = 285 - 101'4 = 183'6$$

Por lo tanto, la máxima concentración de ozono será de 183'6 microgramos por metro cúbico.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. El 75 % de los jóvenes que tienen vídeo consola ha recibido propaganda de un determinado vídeo juego y el 25% restante no. El 30% de los que recibieron la propaganda ha utilizado después dicho vídeo juego y también lo ha hecho el 5% de los que no la recibieron. Calcular de forma razonada:

- La probabilidad de que un joven con vídeo consola seleccionado al azar haya utilizado este vídeo juego.
- La probabilidad de que un joven con vídeo consola seleccionado al azar haya recibido propaganda y no haya utilizado el vídeo juego.

Solución:

Utilizamos los sucesos:

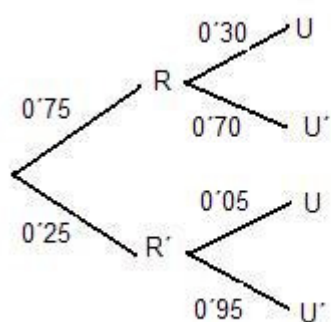
R = el joven con vídeo consola ha recibido propaganda del juego.

R' = el joven con vídeo consola no ha recibido propaganda del juego.

U = el joven ha utilizado el juego.

U' = el joven no ha utilizado el juego.

El árbol del problema será



$$a) \quad p(U) = p(U \cap R) + p(U \cap R') = 0.75 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.2250 + 0.0125 = 0.2375$$

$$b) \quad p(R \cap U') = 0.75 \cdot 0.70 = 0.525$$