

Se desarrollan las dos opciones de cada apartado.

Problema 1 · Consumo de datos y matrices

A) Sean s, p, u los megabytes consumidos por hora en redes sociales, periódicos y universidad. Las relaciones son $s = 1,2p$ y $p = u + 30$. El consumo total permite plantear

$$10s + 4p + 6u = 1470.$$

Sustituyendo $s = 1,2p$ y $u = p - 30$, obtenemos $22p - 180 = 1470$, luego $p = 75$, $s = 90$ y $u = 45$.

90 MB/h en redes; 75 MB/h en periódicos; 45 MB/h en la universidad.

B) Multiplicar A por C^t da

$$AC^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para invertir $B - A$, calculamos primero

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación del apartado c) se reordena como $X^t(B - A) = C$. Multiplicando a la derecha por $(B - A)^{-1}$ y transponiendo:

$$X = (C(B - A)^{-1})^t = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AC^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}; \quad (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Valor de una empresa y función racional

A) $B(t) = -t^2 + 12t - 11$ es una parábola cóncava. Su vértice se encuentra en $t = -12/(2(-1)) = 6$, y $B(6) = 25$. En el intervalo cerrado $[2, 9]$ comparamos también los extremos: $B(2) = 9$ y $B(9) = 16$. Por tanto, el máximo es 25 millones en el año 6 y el mínimo 9 millones en el año 2.

Para que el valor supere 24 millones resolvemos

$$-t^2 + 12t - 11 > 24 \iff (t - 5)(t - 7) < 0,$$

que se cumple para $5 < t < 7$. Por último, integramos el polinomio término a término:

$$\int_3^8 B(t) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 6t^2 - 11t \right]_3^8 = \frac{340}{3}.$$

$$B_{\max} = 25 \text{ en } t = 6; \quad B_{\min} = 9 \text{ en } t = 2; \quad B(t) > 24 \text{ si } 5 < t < 7; \quad \int_3^8 B(t) dt = \frac{340}{3}.$$

B) Factorizamos numerador y denominador:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3(x - 3)(x + 3)}{(x + 2)(x - 1)}.$$

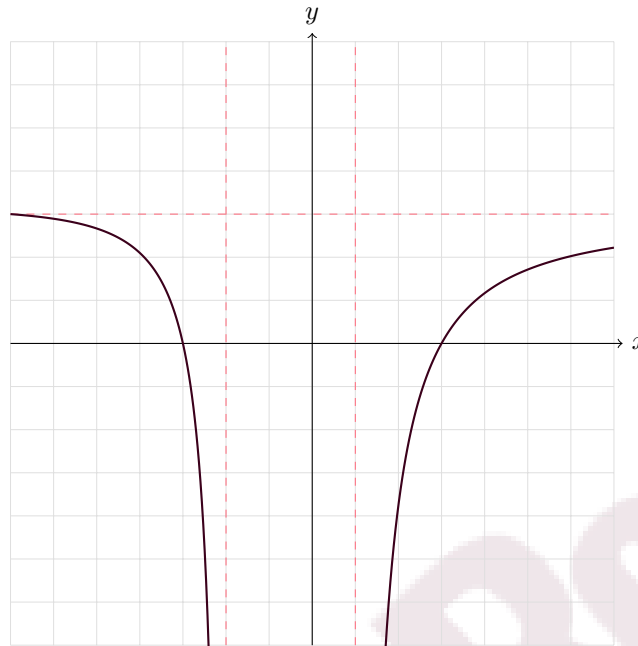
El dominio excluye -2 y 1 . Los cortes con el eje X son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$; con el eje Y , $(0, -27/2)$. Como el numerador no se anula en los puntos excluidos, $x = -2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. La asíntota horizontal es $y = 3$, cociente de los coeficientes principales.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 14x + 9)}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Sus puntos críticos son $r_1 = -7 - 2\sqrt{10}$ y $r_2 = -7 + 2\sqrt{10}$. El signo de la cuadrática da crecimiento en $(-\infty, r_1)$, decrecimiento en $(r_1, -2)$ y $(-2, r_2)$, y crecimiento en $(r_2, 1)$ y $(1, +\infty)$. Así,

$$f(r_1) = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{3} \quad (\text{máximo local}), \quad f(r_2) = \frac{22 + 4\sqrt{10}}{3} \quad (\text{mínimo local}).$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}; \quad AV : x = -2, 1; \quad AH : y = 3; \quad \text{extremos en } r_1, r_2.$$

Problema 3 · Controles de calidad

Sea A el suceso «coche adecuado». Las probabilidades de superar los controles primero, segundo y tercero son 0,8, 0,7 y 0,6. Se califica como adecuado con dos controles positivos, o con resultados distintos en los dos primeros y positivo en el tercero. Multiplicamos probabilidades a lo largo de cada camino y sumamos esos casos incompatibles:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,788.$$

Si además pasó el primer control, los caminos adecuados son ++ y - +; por tanto,

$$P(C_1+ | A) = \frac{0,8 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6}{0,788} = \frac{176}{197}.$$

Solo se realizan dos controles cuando los dos primeros resultados coinciden. Su probabilidad es $0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,62$; entre esos coches solo ++ es adecuado:

$$P(A | \text{dos controles}) = \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,62} = \frac{28}{31}.$$

$$P(A) = 0,788; \quad P(C_1+ | A) = \frac{176}{197}; \quad P(A | \text{dos controles}) = \frac{28}{31}.$$