

MADRID · PAU 2016 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas CCSS

10 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla $N(0,1)$ como anexo. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$

a) 1 punto

Estúdiense para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) 1 punto

Determinése, para $k = 1$, la matriz X tal que $X \cdot A = I_d$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = 1 \\ x + (a-1)y + (a-1)z = 1 \\ x + az = 1 \end{cases}$$

a) 1 punto

Discútase el sistema según los valores de a .

b) 1 punto

Resuélvase el sistema para $a = 3$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Sea S la región del plano definida por

$$2x - y \geq 1; \quad 2x - 3y \leq 6; \quad x + 2y \geq 3; \quad x + y \leq 8; \quad y \leq 3.$$

a) 1 punto

Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) 1 punto

Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S , indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0, \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) 1 punto

Estúdiense la continuidad y derivabilidad de la función.

b) 1 punto

Determinense los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1, \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

a) 1 punto

Determinense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.

b) 1 punto

Calcúlese, para $a = 4$ y $b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}.$$

a) 1 punto

Calcúlense sus asíntotas.

b) 1 punto

Determinense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 3/4$, $P(A | B) = 3/4$ y $P(B | A) = 1/4$.

a) 1 punto

Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) 1 punto

Calcúlese $P(\overline{A} | \overline{B})$.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B . El 65% de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A , el resto con el B . Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5% de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8% de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) 1 punto

El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) 1 punto

El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A , sabiendo que ha resultado erróneo.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) 1 punto

Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\bar{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95% para μ .

b) 1 punto

¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99% tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) 1 punto

Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\bar{x} = 8,1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90% para μ .

b) 1 punto

Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(7,766; 10,233)$ para μ , determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.