Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2017--2018 · Enunciado v5

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Planteamiento y programación lineal

a) Sean x los kilogramos de maíz e y los kilogramos de pienso que se compran. Los requisitos mínimos de nutrientes se expresan con desigualdades de tipo «mayor o igual»; el gasto que se quiere minimizar es

$$600x + 300y \geq 1800, \qquad 200x + 600y \geq 2400, \qquad x, y \geq 0, \qquad C(x,y) = 0{,}50x + 0{,}25y \longrightarrow \min .$$

Equivalentemente, las dos restricciones de nutrientes se pueden simplificar a $2x + y \geq 6$ y $x + 3y \geq 12$.

b) El recinto está definido por $x \geq 0$, $x \leq 2y+2$ y $x+y \leq 5$. Para obtener sus vértices intersectamos las rectas frontera:

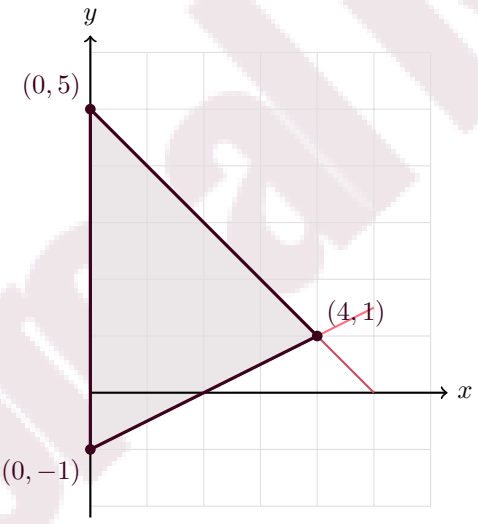
$$x = 0,\ x = 2y + 2 \Longrightarrow (0,-1), \qquad x = 0,\ x + y = 5 \Longrightarrow (0,5),$$

$$x = 2y + 2,\ x + y = 5 \Longrightarrow (x,y) = (4,1).$$

La función lineal alcanza el máximo en un vértice. Evaluamos $F(x,y) = 4x + 3y$:

$$F(0,-1) = -3, \qquad F(0,5) = 15, \qquad F(4,1) = 19.$$

Por tanto, el máximo es 19 y se alcanza en $(4,1)$.



Vértices: $(0,-1), (0,5), (4,1)$; $\quad F_{\text{max}} = 19$ en $(4,1)$.

Ejercicio 2 · Mínimo y representación de una parábola

La producción debe cumplir $x \geq 0$. La función de costes $f(x) = 40 - 6x + x^2$ es polinómica, por lo que está definida para todo real; en este problema solo consideramos $[0, +\infty)$. Para estudiar su variación, calculamos la derivada:

$$f'(x) = 2x - 6.$$

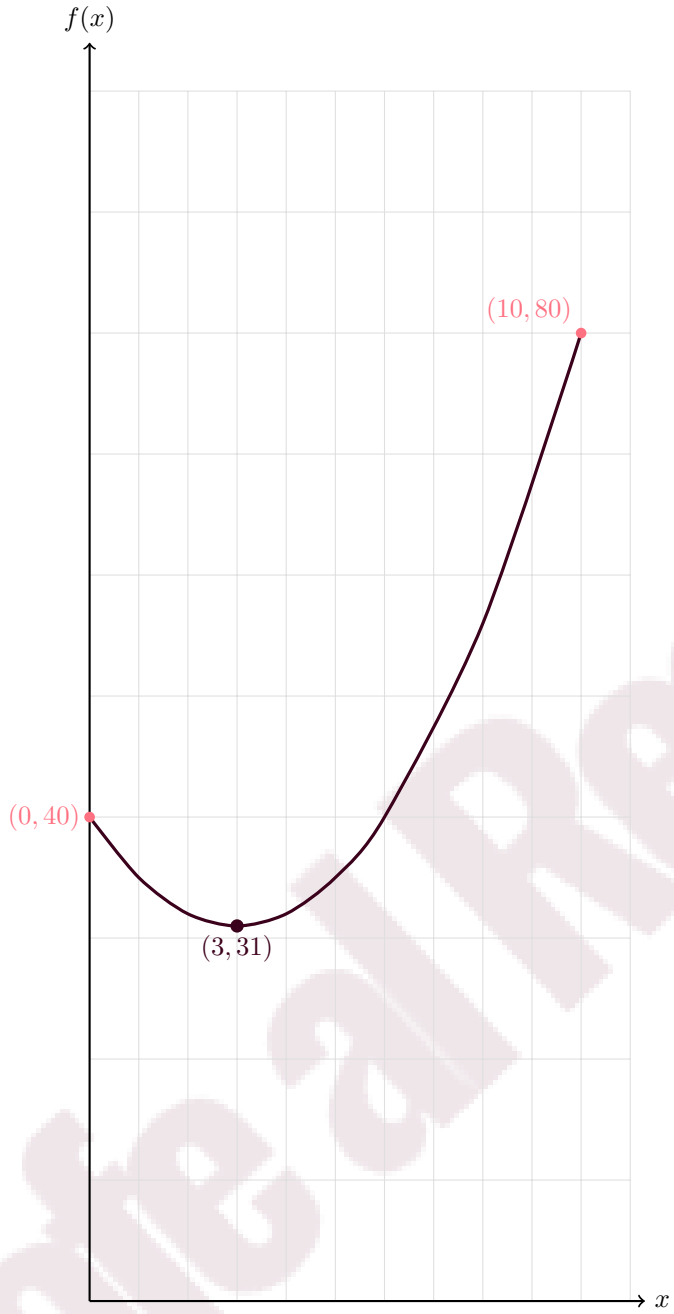
Se anula en $x = 3$. En $[0,3)$ la derivada es negativa y en $(3,+\infty)$ es positiva; por ello, el coste disminuye hasta producir 3 unidades y luego aumenta. El coste mínimo es

$$f(3) = 40 - 18 + 9 = 31.$$

Si no se produce nada, $f(0) = 40$. Para hallar las cantidades con coste 80, resolvemos

$$40 - 6x + x^2 = 80 \Longrightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Longrightarrow (x-10)(x+4) = 0.$$

Las soluciones son $x = 10$ y $x = -4$, pero esta última no pertenece al dominio físico $x \geq 0$; se producen 10 unidades. La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice $(3,31)$ y corte con el eje vertical $(0,40)$.



$f_{\text{mín}} = 31$ en $x = 3$; $\quad f(0) = 40$; $\quad f(x) = 80$ para $x = 10$ en el dominio del problema.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Sean C el suceso «residir en el centro» y R el suceso «estar a favor de restringir el tráfico». La probabilidad de vivir en el centro es $5000/15000 = 1/3$ y la de vivir en la periferia es $2/3$. **a)** Sumamos las probabilidades de apoyar la medida desde cada zona:

$$P(R) = P(C)P(R \mid C) + P(C^c)P(R \mid C^c) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}20 = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

b) Para la intersección, multiplicamos la probabilidad de residir en el centro por la probabilidad condicionada de apoyar la medida:

$$P(C \cap R) = P(C)P(R \mid C) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 = \frac{19}{60}.$$

c) Aplicamos Bayes para calcular la probabilidad de residir en el centro sabiendo que la persona apoya la restricción:

$$P(C \mid R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{19/60}{9/20} = \frac{19}{27}.$$

$$P(R) = \frac{9}{20}; \qquad P(C \cap R) = \frac{19}{60}; \qquad P(C \mid R) = \frac{19}{27}.$$

Ejercicio 4 · Muestreo y distribución de las medias

El enunciado no especifica si se devuelve cada tornillo antes de extraer el siguiente. Para poder enumerar las muestras, supondremos que el muestreo es con reemplazamiento; así, cada extracción puede dar cualquiera de los cuatro pesos y el orden distingue las muestras. Por tanto, hay $4^2 = 16$ muestras equiprobables:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$

Cada pareja tiene probabilidad $1/16$. La media muestral de una pareja (x_1, x_2) es $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$. Al agrupar las 16 muestras según el valor de esta media obtenemos:

$\bar{x}$ (g)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$P(\bar{X} = \bar{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

La esperanza es la media ponderada de los valores posibles, y la varianza es la media ponderada de los cuadrados de sus desviaciones respecto de la esperanza:

$$E(\bar{X}) = \sum \bar{x}\, P(\bar{X} = \bar{x}) = 2{,}5 \text{ g},$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sum (\bar{x} - 2{,}5)^2 P(\bar{X} = \bar{x}) = \frac{2{,}25 + 2 + 0{,}75 + 0 + 0{,}75 + 2 + 2{,}25}{16} = \frac{5}{8} \text{ g}^2.$$

$$\boxed{E(\bar{X}) = 2{,}5 \text{ g}; \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{5}{8} \text{ g}^2.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos por separado las matrices de la igualdad propuesta:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2.$$

La igualdad no se verifica para estas matrices.

b) En $XA = 2B^t + I_2$, primero calculamos el segundo miembro:

$$2B^t + I_2 = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 2 \neq 0$, despejamos multiplicando por A^{-1} a la derecha:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = (2B^t + I_2)A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB; \qquad X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y tangente

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2, & x < 1, \\ bx + \dfrac{2}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

El punto de unión es $x = 1$. Para la continuidad, igualamos los límites y el valor de las dos ramas:

$$1 + a = b + 2 \quad \Longrightarrow \quad b = a - 1.$$

Las derivadas son $3x^2 + 2ax$ y $b - 2/x^2$. Para que coincidan en $x = 1$, debe cumplirse

$$3 + 2a = b - 2 \quad \Longrightarrow \quad b = 5 + 2a.$$

Resolvemos las dos condiciones: $a - 1 = 5 + 2a$, de donde $a = -6$ y $b = -7$. Para $b = 3$, en $x = 2$ usamos la segunda rama $f(x) = 3x + 2/x$. Su valor y su pendiente son

$$f(2) = 7, \qquad f'(x) = 3 - \frac{2}{x^2}, \qquad f'(2) = \frac{5}{2}.$$

La recta tangente por $(2, 7)$ es

$$y - 7 = \frac{5}{2}(x - 2) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{5}{2}x + 2.$$

$$\boxed{a = -6, \quad b = -7; \qquad t_{x=2} : y = \frac{5}{2}x + 2 \quad (b = 3).}$$

Ejercicio 3 · Probabilidades en una población finita

Las zonas contienen 1500, 1000 y 500 plazas, respectivamente, de un total de 3000. En A hay 1350 plazas protegidas; en B, $0{,}8 \cdot 1000 = 800$; y en C, 250. En total hay 2400 plazas protegidas y 600 sin protección. **a)** Las zonas A y B suman 2500 plazas:

$$P(A \cup B) = \frac{2500}{3000} = \frac{5}{6}.$$

b) La probabilidad de elegir una plaza no protegida es

$$P(\text{no protegida}) = \frac{600}{3000} = \frac{1}{5}.$$

c) Entre las 2400 plazas protegidas, 800 están en la zona B:

$$P(B \mid \text{protegida}) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{P(A \cup B) = \frac{5}{6}; \qquad P(\text{no protegida}) = \frac{1}{5}; \qquad P(B \mid \text{protegida}) = \frac{1}{3}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de estudiantes usuarios de la red social es $\widehat{p} = 380/500 = 0{,}76$ y $\widehat{q} = 0{,}24$. El intervalo bilateral de confianza para una proporción es

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}.$$

a) Con confianza del 97%, $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$. El error máximo es

$$E = 2{,}170\sqrt{\frac{0{,}76 \cdot 0{,}24}{500}} \approx 0{,}04145,$$

y por tanto

$$IC_{97\%}(p) = [0{,}76 - E,\ 0{,}76 + E] \approx [0{,}71855,\ 0{,}80145].$$

b) Para confianza del 96%, $z_{0{,}98} \approx 2{,}054$. Manteniendo las proporciones muestrales e imponiendo $E \leq 0{,}02$,

$$2{,}054\sqrt{\frac{0{,}76 \cdot 0{,}24}{n}} \leq 0{,}02 \quad \Longrightarrow \quad n \geq \frac{2{,}054^2 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}24}{0{,}02^2} \approx 1923{,}8.$$

El tamaño mínimo entero es 1924 estudiantes.

$$\boxed{IC_{97\%}(p) \approx [0{,}71855, 0{,}80145]; \qquad n_{\text{min}} = 1924.}$$