

Convocatoria extraordinaria de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

La función es $f(x) = e^x p(x)$, con $p(x) = x^2 - 5x + 6$. Derivando dos veces,

$$f''(x) = e^x (p(x) + 2p'(x) + p''(x)) = e^x (x^2 - x - 2) = e^x (x+1)(x-2).$$

Como $e^x > 0$, el signo de f'' viene dado por $(x+1)(x-2)$. Así, la gráfica es cóncava hacia abajo en $(-1, 2)$ y convexa en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. El signo cambia en ambos ceros: los puntos de inflexión son $(-1, 12/e)$ y $(2, 0)$.

Ejercicio 2

Usamos $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$:

$$\int_0^\pi x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos 2x \, dx.$$

En la segunda integral, por partes con $u = x$ y $dv = \cos 2x \, dx$, se obtiene $[x \sin 2x/2 + \cos 2x/4]_0^\pi = 0$. Por tanto,

$$\int_0^\pi x \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ejercicio 3

El determinante de la matriz de coeficientes es $\det A = (m-4)(m+2)$. Si $m \neq 4, -2$, el sistema es SCD. Para $m = 4$, el menor superior izquierdo de orden dos vale 12, por lo que $\text{rg } A = 2$; la matriz ampliada tiene rango 3 (la tercera fila de coeficientes queda dependiente y el término independiente no), así que el sistema es SI. Para $m = -2$, las filas primera y segunda de coeficientes son proporcionales y la tercera es independiente; también en la ampliada se mantiene la misma dependencia, por lo que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$ y el sistema es SCI.

Al sustituir $m = -2$, la tercera ecuación da $z = -1/3$. Luego ninguna solución puede tener $z = 0$; por tanto, no existe tal solución.

Ejercicio 4

Los planos que definen r tienen normales $(4, -3, 4)$ y $(3, -2, 1)$. Su producto vectorial da un director de r :

$$\vec{d} = (4, -3, 4) \times (3, -2, 1) = (5, 8, 1).$$

Para que π sea paralelo a r , su normal $(1, -1, a)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}$. Así, $5 - 8 + a = 0$ y $a = 3$.

Un plano perpendicular a r tiene como normal el vector director $\vec{d}$. Al pasar por $P(1, 2, 3)$, su ecuación es $5(x-1) + 8(y-2) + (z-3) = 0$, es decir,

$$5x + 8y + z - 24 = 0.$$

Ejercicio 5

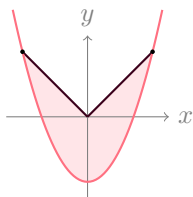
En $x = 1$ la continuidad exige $e^{2a-4b} = 1$, por lo que $2a - 4b = 0$. La derivada del tramo izquierdo es $2ae^{2ax-4b}$, mientras que la del derecho $1 - x \ln x$ es $-(\ln x + 1)$. Igualando en 1 y usando que el valor exponencial allí es 1, queda $2a = -1$. Por tanto, $a = -1/2$, $b = -1/4$.

En $x = 2$, $f(2) = 1 - 2 \ln 2$ y $f'(2) = -(1 + \ln 2)$. La recta tangente es

$$y - (1 - 2 \ln 2) = -(1 + \ln 2)(x - 2).$$

Ejercicio 6

Para $x \geq 0$, la igualdad $|x| = x^2 - 2$ da $x = 2$; para $x < 0$, $-x = x^2 - 2$ da $x = -2$. Los puntos de corte son $(-2, 2)$ y $(2, 2)$. Entre ellos $|x|$ queda por encima de $x^2 - 2$ (por ejemplo, en $x = 0$ sus valores son 0 y -2). Por simetría,



$$S = 2 \int_0^2 (x - x^2 + 2) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2 = \frac{20}{3}.$$

Ejercicio 7

Resolvemos $\det(A - \lambda I) = 0$ para hallar los valores propios:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Así, $\lambda = 1, 2, -1$.

Para $\lambda = 1$, el sistema $(A - I)X = 0$ contiene las ecuaciones $2y + 3z = 0$, $-y + 2z = 0$ y $y = 0$. Estas fuerzan $y = z = 0$, mientras que x queda libre; las soluciones son $(t, 0, 0)$. No existe una solución con $z = 1$.

Ejercicio 8

Un punto de r se obtiene tomando parámetro 0: $P_0 = (0, -1, -2)$, y su director es $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Como $\vec{v} \cdot (1, -1, 1) = 0$, la recta es paralela al plano. La distancia es la de P_0 al plano:

$$d(r, \pi) = \frac{|0 - (-1) - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{3}.$$

El plano pedido contiene r y es perpendicular a π . Su vector normal debe ser ortogonal tanto a $\vec{v}$ como a $(1, -1, 1)$; podemos tomar su producto vectorial, proporcional a $(0, 1, 1)$. Usando P_0 , resulta

$$y + z + 3 = 0.$$