

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se ha enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12'5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos)** Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?
- 1.2 (0.75 puntos)** Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es el la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

H = partido jugado en hierba TB = partido jugado en tierra batida PD = partido jugado en pista dura
 RA = el partido lo gana Rafa RO = el partido lo gana Roger

De los datos del problema:

“El 10% de los partidos se jugaron en hierba” $\rightarrow P(H) = 0'10$

“el 40% en tierra batida” $\rightarrow P(TB) = 0'40$

Luego $P(PD) = 1 - 0'10 - 0'40 = 0'50$

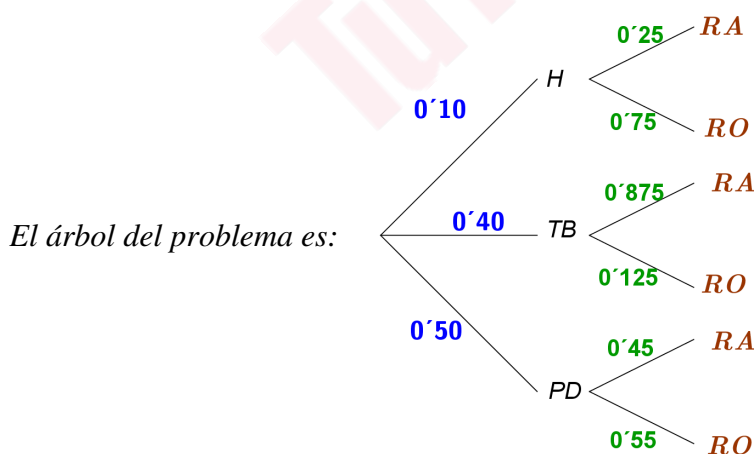
Como en cada partido gana Rafa o gana Roger $\rightarrow P(RA) + P(RO) = 1$

En hierba: “Rafa ganó el 25% de los partidos jugados” $\rightarrow P(RA) = 0'25$ y $P(RO) = 0'75$

En tierra batida: “Roger ganó el 12'5% de los jugados” $\rightarrow P(RO) = 0'125$ y $P(RA) = 0'875$

En pista dura: “Roger ganó el 55% de los jugados” $\rightarrow P(RO) = 0'55$ y $P(RA) = 0'45$

El árbol del problema es:



1.1 Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

Calculamos $P(RO)$

$$P(RO) = 0'10 \cdot 0'75 + 0'40 \cdot 0'125 + 0'50 \cdot 0'55 = 0'4$$

Solución: Roger ganó el 40% de los partidos.

1.2 Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

La probabilidad pedida es $P(PD/RA)$

$$P(PD/RA) = \frac{P(PD \cap RA)}{P(RA)} = \frac{0'50 \cdot 0'45}{1 - P(RO)} = \frac{0'50 \cdot 0'45}{1 - 0'40} = 0'375.$$

Solución: si un partido fue ganado por Rafa, la probabilidad de que se jugara en pista dura es 0'375.

1.3 Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es el la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

En pista dura $P(RO) = 0'55$

Siendo X = número de partidos ganados por Roger en pista dura, $X = B(10, 0'55)$

La probabilidad pedida es $P(X = 5 \text{ o } 6) = P(X = 5) + P(X = 6) =$

$$= \binom{10}{5} 0'55^5 \cdot 0'45^5 + \binom{10}{6} 0'55^6 \cdot 0'45^4 = 0'4724$$

Solución: la probabilidad pedida es 0'4724.

Tu Profeta al Rescate

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo de tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , mas el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , mas el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrios factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

Solución:

De las condiciones de equilibrio de cada tanque obtenemos las ecuaciones:

$$\text{Tanque 1: } x + 3y + z = 5$$

$$\text{Tanque 2: } \alpha x + 2z = 0$$

$$\text{Tanque 3: } z = \alpha y \rightarrow \alpha y - z = 0$$

$$\text{El sistema a estudiar es: } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases} \quad \text{y su matriz ampliada es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right)$$

2.1.1

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha + 3\alpha = \alpha^2 + \alpha; \quad \alpha^2 + \alpha = 0; \quad \alpha(\alpha + 1) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 1 = 0; \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

Si $\alpha \neq -1$ y 0

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $\alpha = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

En A, el menor de orden 2 correspondiente a F_1 F_2 y C_2 C_3 :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En A', el menor de orden 3 correspondiente a F_1 F_2 F_3 y C_2 C_3 C_4 :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible

Si $\alpha = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, y que el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

En A', como las filas 2 y 3 son proporcionales $\text{ran}(A') \leq 2$ y como $\text{ran}(A) = 2 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$:

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, si $\alpha \neq -1$ y 0 , el sistema es compatible determinado (el sistema tiene una única solución),
si $\alpha = -1$, el sistema es incompatible (el sistema no tiene solución) y
si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones).

2.1.2 Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrios factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

Si $\alpha \neq -1$, tenemos dos posibilidades.

1ª) si $\alpha \neq -1$ y $\alpha \neq 0$, el sistema es compatible determinado

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Cramer (sabemos que $|A| = \alpha^2 + \alpha$)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{-10\alpha}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{-10\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{-10}{(\alpha + 1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{5\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{5}{(\alpha + 1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{5\alpha^2}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{5\alpha}{(\alpha + 1)}$$

2ª) si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado

Del estudio realizado en el apartado anterior (2.1.1 si $\alpha = 0$) el menor de orden 2 no nulo corresponde a 1ª y 2ª ecuaciones e incógnitas y, z . El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0$$

Sustituyendo el valor de z en la 1ª ecuación:

$$3y + 0 = 5 - x; \quad 3y = 5 - x; \quad y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución: si $\alpha \neq -1$ los valores x, y, z , en función del valor α son:

$$\text{si } \alpha \neq 0, \begin{cases} x = \frac{-10}{\alpha + 1} \\ y = \frac{5}{\alpha + 1} \\ z = \frac{5\alpha}{\alpha + 1} \end{cases} \quad \text{y si } \alpha = 0, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones: $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5 (2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

2.1.1 Resolver $Ax = Bx + b$.

A partir de la expresión anterior vamos a intentar despejar x .

$$Ax = Bx + b; \quad Ax - Bx = b; \quad (A - B)x = b \rightarrow x = (A - B)^{-1}b$$

Comprobemos que existe $(A - B)^{-1}$,

$$\text{Calculemos } A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B)^{-1}$$

Calculemos $(A - B)^{-1}$,

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y } (A - B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } x = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } x = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Calcular $|A^5 (2B)^{-1}|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{y} \quad |nA| = n^2 |A| \quad (\text{por ser } A \text{ } 2 \times 2)$$

$$|A^5 (2B)^{-1}| = |A|^5 |(2B)^{-1}| = |A|^5 \frac{1}{|2B|} = |A|^5 \frac{1}{4|B|} = 3^5 \frac{1}{4 \cdot 19} = \frac{243}{76}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

$$\text{Solución: } |A^5 (2B)^{-1}| = \frac{243}{76}.$$

2.1.3 ¿ α, β ? / $\alpha A + \beta B = I$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por la 2ª y 3ª ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & -1xI^a \\ \alpha + 3\beta = 1 & 2^a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \quad \text{sumando ambas ecuaciones} \quad \beta = 1$$

Sustituyendo el valor de β en la 1ª ecuación: $\alpha + 2 \cdot 1 = 0$; $\alpha = -2$

Comprobemos si esta solución cumple la 1ª ecuación del sistema de tres ecuaciones:

¿ $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$?; ¿ $-4 + 5 = 1$?; ¿ $1 = 1$? Sí.

Solución: $\alpha = -2$ y $\beta = 1$.

3.1 Se consideran los puntos del espacio $A(0, -1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$ y el vector $v = (2, -1, 1)$. Se pide

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

Solución:

3.1.1 ¿Plano π ? / $\pi \perp v$ y $A \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π .

Como $\pi \perp v \rightarrow \vec{n}_\pi = v = (2, -1, 1)$

La ecuación del plano π será: $2x - y + z + D = 0$

Como el punto $A(0, -1, 0) \in \pi \rightarrow 2 \cdot 0 - (-1) + 0 + D = 0; 1 + D = 0; D = -1$

Luego $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$

Solución: la ecuación del plano π pedido es $2x - y + z - 1 = 0$.

3.1.2 ¿recta r ? / $r \perp \pi$ y $B \in r$.

Como $r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, -1, 1)$

De la recta r conocemos $\begin{cases} \text{punto } B(1, 0, 1) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$

su ecuación paramétrica será $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Solución: una ecuación de la recta r es $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

3.1.3 ¿Punto C del plano π que está más cerca de B ?

En primer lugar ¿ $B \in \pi$?, ¿ $2 \cdot 1 - 0 + 1 - 1 = 0$?, ¿ $2 = 0$? No, luego $B \notin \pi$ (el punto C no es B)

El punto del plano π más cercano a B será el punto de corte de la recta r , del apartado anterior, con π

Corte entre r y π :

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano,

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + 1 + \lambda - 1 = 0; \quad 2 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0; \quad 6\lambda + 2 = 0; \quad 6\lambda = -2; \quad \lambda = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{El punto de corte será, } \begin{cases} x = 1 + 2 \frac{-1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 + \frac{-1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Solución: el punto C del plano π que está más cerca de B es $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.1.4 ¿ $d(B, \pi)$? $B = (1, 0, 1)$ y $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$.

$$d(B, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 0.8165$$

Solución: $d(B, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ u.l.} \cong 0.8165 \text{ u.l.}$

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, -20)$, $C(0, 15, -30)$ y $D = (1, 2, -1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Solución:

3.2.1 ¿Triángulo $ABC \in$ Plano π ?

El triángulo ABC pertenecerá al plano π si los tres puntos (A , B y C) están en el plano.

Comprobémoslo:

$$¿A \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \quad \text{Sí}$$

$$¿B \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0?, \quad ¿40 = 0? \quad \text{No}$$

Por tanto, el triángulo ABC no pertenece al plano π

3.2.2 Coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

Obtendremos el punto pedido realizando los siguientes cálculos:

$$1) \text{ Sea } \sigma \text{ el plano formado por } A, B \text{ y } C \rightarrow \begin{cases} P_\sigma = A(0,0,0) \\ \vec{v}_1 = \vec{AB} = (10,0,-20) \\ \vec{v}_2 = \vec{AC} = (0,15,-30) \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 150z + 300x + 300y = 0 \rightarrow 2x + 2y + z = 0$$

2) Sea s la recta que pasa por D y es perpendicular al plano σ .

$$s: \begin{cases} P_s = D(1,2,-1) \\ \vec{v}_s = \vec{n}_\sigma = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

3) Corte entre la recta s y el plano σ .

$$2(1 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0; \quad 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 5 + 9\lambda = 0; \quad 9\lambda = -5; \\ \lambda = \frac{-5}{9}$$

4) Cálculo del punto proyección.

Sustituyendo el valor de λ obtenido anteriormente en la ecuación de la recta s :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \frac{-5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C son $\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$.

3.2.3 Calcular la distancia del punto D al plano π .

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto D al plano π es: $\frac{9}{\sqrt{14}}$.

Tu Profe al Rescate

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2 (10 - t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

Solución:

$$F'(t) = t^2 (10 - t), \quad t = \text{número de días después de iniciarse el brote } (t \geq 0)$$

4.1.1 ¿ $F(t)$? / $F(0) = 6$,

$$F'(t) = 10t^2 - t^3 \rightarrow F(t) = \int (10t^2 - t^3) dt = 10 \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$$

$$\text{Como } F(0) = 6; \quad 10 \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = 6; \quad C = 6$$

$$\text{Luego, } F(t) = 10 \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6.$$

4.1.2 ¿máximo de $F(t)$?

$$F'(t) = 10t^2 - t^3; \quad 10t^2 - t^3 = 0; \quad t^2(10 - t) = 0 \quad \begin{cases} t^2 = 0; & t = 0 \\ 10 - t = 0; & t = 10 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de $F'(t)$ en los intervalos $(0, 10)$ y $(10, +\infty)$

$$t = 5, \quad F'(5) = 10 \cdot 5^2 - 5^3 = 125 > 0$$

$$t = 15, \quad F'(15) = 10 \cdot 15^2 - 15^3 = -1125 < 0$$

En $t = 10$ hay un máximo local y como $F(t)$ a la izquierda de 10 es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

$$\text{Para } t = 10, \quad F(10) = 10 \frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{2518}{3} \cong 839'3333.$$

Por tanto, **10 días después de iniciarse el brote se alcanza el máximo del coeficiente de gravedad de la gripe que es 839'3333.**

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

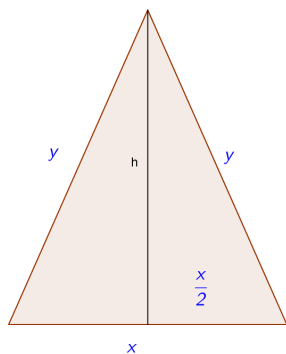
4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Solución:

4.2.1 Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

De los datos del problema sabemos que el suelo del invernadero es un triángulo isósceles (uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud) de perímetro 60 m.



La relación entre x e y es: $x + 2y = 60$; $2y = 60 - x$; $y = 30 - \frac{x}{2}$

$A(x) = \frac{xh}{2}$, obtengamos el valor de h en función de x . Para ello aplicamos el teorema de Pitágoras en cualquiera de los triángulos rectángulos:

$$\left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2; \quad 900 - 30x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + h^2; \quad h^2 = 900 - 30x;$$

$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

Como h es una longitud, $h > 0$. Por tanto $900 - 30x > 0$; $900 > 30x$; $30 > x$.

Finalmente, $A(x) = \frac{x\sqrt{900-30x}}{2} \quad 0 < x < 30.$

4.2.2 El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

$$A(x) = \frac{x\sqrt{900-30x}}{2} \quad 0 < x < 30$$

$$f(x) = [A(x)]^2 = \left(\frac{x\sqrt{900-30x}}{2}\right)^2 = \frac{x^2(900-30x)}{4} = \frac{900x^2 - 30x^3}{4} \quad 0 < x < 30$$

Máximo de $f(x)$,

$$f'(x) = \frac{1800x - 90x^2}{4}; \quad \frac{1800x - 90x^2}{4} = 0; \quad 1800x - 90x^2 = 0; \quad 90x(20 - x) = 0 \begin{cases} 90x = 0; & x = 0 \\ 20 - x = 0; & x = 20 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(0, 20)$ y $(20, 30)$,

$$x = 10, \quad f'(10) = \frac{1800 \cdot 10 - 90 \cdot 10^2}{4} = 2250 > 0$$

$$x = 25, \quad f'(25) = \frac{1800 \cdot 25 - 90 \cdot 25^2}{4} = -2812.5 < 0$$

, el máximo local se alcanza para $x = 20$.

Como $f(x)$ a la izquierda de $x = 20$ es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

Para $x = 20$, área del triángulo, $A(20) = \frac{20 \sqrt{900 - 30 \cdot 20}}{2} = 10\sqrt{300} = 100\sqrt{3}$

Por tanto, la eficiencia estructural es máxima para $x = 20 \text{ m}$ y en este caso el área del triángulo es de $100\sqrt{3} \text{ m}^2 \cong 173.2051 \text{ m}^2$.

Tu Profe al Rescate