

Junio de 2024 · Convocatoria ordinaria

El enunciado propone ocho problemas y pide escoger cuatro. Aquí se resuelven los ocho, con los pasos y justificaciones.

Problema 1 · Discusión de un sistema con parámetro

El sistema, con $m \in \mathbb{R}$, es

$$\begin{cases} -x + y + z = m, \\ 2x + my - z = 3m, \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A_m = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_m^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array} \right).$$

Aplicamos Rouché-Frobenius: el sistema es compatible si y solo si $\text{rg}(A_m) = \text{rg}(A_m^*)$; será determinado si el rango común es 3 e indeterminado si es menor que 3.

Calculamos primero el determinante, que permite localizar los valores donde el rango de A_m puede bajar:

$$\begin{aligned} \det A_m &= (-1) \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (m-3) - (m-3) + 6 - m(m-1) \\ &= -m^2 + m + 6 = -(m-3)(m+2). \end{aligned}$$

Caso 1: $m \neq -2$ y $m \neq 3$. El determinante es distinto de cero, así que existe un menor de orden 3 no nulo:

$$\text{rg}(A_m) = 3.$$

La matriz ampliada tiene solo tres filas y contiene a A_m , luego su rango también es 3. Por tanto,

$$\text{rg}(A_m) = \text{rg}(A_m^*) = 3,$$

y el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso 2: $m = -2$. Al sustituir el parámetro,

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_{-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Un menor de orden 2 de A_{-2} , formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3, vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Como el determinante de orden 3 ya es cero, resulta $\text{rg}(A_{-2}) = 2$.

Para la ampliada tomamos las columnas de x, z y del término independiente. El menor de orden 3 es

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_{-2}^*) = 3 > \text{rg}(A_{-2}) = 2$. Por Rouché-Frobenius el sistema es **incompatible (SI)**.

Caso 3: $m = 3$. Las matrices son

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Las filas 2 y 3, incluidos sus términos independientes, son iguales. Además, el menor de orden 2 de las filas 1 y 2 y

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A_3) = \text{rg}(A_3^*) = 2 < 3$, y el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

Para hallar todas las soluciones ponemos $z = t$. Las dos ecuaciones independientes quedan

$$-x + y + t = 3, \quad 2x + 3y - t = 9.$$

De la primera, $y = x + 3 - t$. Sustituimos en la segunda:

$$2x + 3(x + 3 - t) - t = 9 \implies 5x = 4t \implies x = \frac{4}{5}t.$$

Entonces

$$y = \frac{4}{5}t + 3 - t = 3 - \frac{1}{5}t.$$

La solución general es

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}t, 3 - \frac{1}{5}t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En resumen: SCD si $m \neq -2, 3$; SI si $m = -2$; SCI si $m = 3$, con la solución general anterior.

Problema 2 · Rango, ecuación matricial y potencia

Se consideran

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Rango de A_m

Desarrollamos el determinante por la segunda fila:

$$\det A_m = m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m(m - m^2) = m^2(1 - m).$$

Si $m \neq 0, 1$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A_m) = 3$.

Para $m = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

El determinante es cero y hay un menor de orden 2 no nulo; luego $\text{rg}(A_0) = 2$.

Para $m = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

De nuevo el determinante es cero y existe un menor de orden 2 no nulo, así que $\text{rg}(A_1) = 2$. En conclusión,

$$\text{rg}(A_m) = \begin{cases} 3, & m \neq 0, 1, \\ 2, & m = 0 \text{ o } m = 1. \end{cases}$$

b) Resolver $AX = B$ para $m = -1$

Al sustituir $m = -1$,

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_{-1}) = 2 \neq 0.$$

La matriz es invertible. Multiplicamos $A_{-1}X = B$ por A_{-1}^{-1} por la izquierda:

$$X = A_{-1}^{-1}B, A_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos por separado las dos columnas de X , usando las columnas e_1 y e_2 de B :

$$X_1 = A_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, X_2 = A_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Juntando ambos resultados,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Calcular A^5 para $m = 0$

Usamos A_0 del apartado a) y multiplicamos las matrices:

$$A_0^2 = A_0 A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_0^3 = A_0^2 A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A_0^3 = A_0^2$, al multiplicar por A_0 se mantiene la misma matriz; por inducción $A_0^n = A_0^2$ para todo $n \geq 2$. No es una matriz cíclica que vuelva a la identidad: las potencias se estabilizan. Por tanto,

$$A_0^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 3 · Recta y plano

La recta viene dada por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1},$$

y el plano es $\pi: 3x - my + z = 1$. Tomando el mismo valor t en las tres fracciones, pasamos a la forma paramétrica:

$$r: x = 1 + 2t, y = -1 + 3t, z = -2 - t, t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto de la recta es $P_0 = (1, -1, -2)$, su vector director es $\vec{v} = (2, 3, -1)$ y un vector normal del plano es $\vec{n} = (3, -m, 1)$.

a) Paralelismo y posible pertenencia

Una recta es paralela a un plano cuando su vector director es perpendicular al vector normal. Aplicamos el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 6 - 3m - 1 = 5 - 3m.$$

Por tanto,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \implies 5 - 3m = 0 \implies m = \frac{5}{3}.$$

Para que la recta esté contenida en el plano, además su punto P_0 debe verificar la ecuación. Sustituimos:

$$3(1) - m(-1) + (-2) = 1 \implies 1 + m = 1 \implies m = 0.$$

La condición de paralelismo exigía $m = 5/3$, mientras que la pertenencia del punto exige $m = 0$; no pueden cumplirse a la vez. **No existe ningún valor de m para el que la recta esté contenida en π .** Solo es paralela para $m = 5/3$, sin estar contenida.

b) Plano paralelo a π que contiene a r

Usamos el valor $m = 5/3$. Multiplicando la ecuación de π por 3, su normal puede escribirse $(9, -5, 3)$. Todo plano paralelo tiene forma general

$$9x - 5y + 3z + D = 0.$$

Debe pasar por $P_0 = (1, -1, -2)$, así que

$$9(1) - 5(-1) + 3(-2) + D = 0 \implies 8 + D = 0 \implies D = -8.$$

El plano buscado es

$$\boxed{9x - 5y + 3z - 8 = 0.}$$

c) Distancia de $P = (1, -1, -2)$ al plano π

Para un plano $ax + by + cz + d = 0$, la distancia de $P = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Escribimos π como $3x - my + z - 1 = 0$, de modo que el denominador es $\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}$. Al sustituir el punto:

$$d(P, \pi) = \frac{|3(1) - m(-1) + (-2) - 1|}{\sqrt{9 + m^2 + 1}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}.$$

Problema 4 · Cuadrado en el espacio

Se dan $P = (2, 1, 3)$, $Q = (1, 3, 1)$ y $R = (4, 7, 6)$. El vector del lado conocido es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2), \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Si los otros dos vértices fueran los extremos del lado opuesto, la recta que los contiene tendría que ser paralela a PQ y pasar por R .

a) Recta r

Con punto R y director $\overrightarrow{PQ}$, su forma paramétrica es

$$\boxed{r: x = 4 - t, y = 7 + 2t, z = 6 - 2t, t \in \mathbb{R}.}$$

b) Plano que contendría al cuadrado

El plano tendría que contener P, Q, R . Calculamos dos vectores del plano:

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2), \quad \overrightarrow{PR} = R - P = (2, 6, 3).$$

El producto vectorial da un vector normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (18, -1, -10).$$

La ecuación general del plano por P es

$$18(x - 2) - (y - 1) - 10(z - 3) = 0 \implies \boxed{18x - y - 10z - 5 = 0.}$$

c) Comprobación de existencia de los otros vértices

En un cuadrado, el lado opuesto a PQ es paralelo a PQ , y la distancia entre las rectas que contienen esos lados debe ser igual a la longitud del lado: 3. Calculamos la distancia de R a la recta que pasa por P con dirección $\overrightarrow{PQ}$:

$$d(R, r_{PQ}) = \frac{|(R - P) \times \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\sqrt{(-18)^2 + 1^2 + 10^2}}{3} = \frac{\sqrt{425}}{3} = \frac{5\sqrt{17}}{3} \approx 6.87.$$

La distancia obtenida, $5\sqrt{17}/3 \approx 6.87$, no coincide con la longitud del lado, que es 3.

Conclusión: Los datos son incompatibles con un cuadrado; no existen los otros dos vértices pedidos.

Problema 5 · Función exponencial

La función es

$$f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} = kx e^{-2x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Dominio y asíntotas

El dominio son todos los reales porque $e^{2x} > 0$ para cualquier x ; el denominador nunca se anula:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Al ser el dominio todo $\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales.

Si $k = 0$, $f(x) = 0$ para todo x ; sus límites en $+\infty$ y $-\infty$ valen 0, así que la recta $y = 0$ coincide con la gráfica y es su asíntota horizontal en ambos extremos. No hay asíntota oblicua.

Supongamos ahora $k \neq 0$. En $+\infty$, la exponencial crece más deprisa que x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. En $-\infty$, $e^{2x} \rightarrow 0^+$, y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & k > 0, \\ +\infty, & k < 0; \end{cases}$$

no hay asíntota horizontal en ese extremo.

Comprobamos si puede haber una asíntota oblicua $y = mx + n$. La pendiente tendría que ser el límite de $f(x)/x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} k e^{-2x},$$

que no es finito cuando $k \neq 0$. En $+\infty$ ya hay una asíntota horizontal, así que tampoco aparece una oblicua allí. No hay, por tanto, asíntotas oblicuas.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos

Derivamos usando la regla del producto:

$$f'(x) = k e^{-2x} + kx(-2)e^{-2x} = k e^{-2x}(1 - 2x).$$

El factor e^{-2x} siempre es positivo. Igualamos el otro factor a cero:

$$k(1 - 2x) = 0.$$

Si $k \neq 0$, el único punto crítico es $x = 1/2$. Probamos un valor a cada lado y estudiamos el signo de f' :

Condición	Intervalo	Prueba en $f'(x)$	Signo	Comportamiento
$k > 0$	$(-\infty, 1/2)$	$x = 0: k > 0$	+	Creciente
$k > 0$	$(1/2, +\infty)$	$x = 1: -k/e^2 < 0$	-	Decreciente
$k < 0$	$(-\infty, 1/2)$	$x = 0: k < 0$	-	Decreciente
$k < 0$	$(1/2, +\infty)$	$x = 1: -k/e^2 > 0$	+	Creciente

No hay puntos fuera del dominio que añadir a la tabla. Si $k > 0$, el signo cambia de + a -, así que hay un máximo en

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e} \right).$$

Si $k < 0$, el signo cambia de - a + y hay un mínimo en el mismo punto, de valor $k/(2e)$. Si $k = 0$, la función es constante: no tiene extremos estrictos y todos sus puntos son a la vez máximos y mínimos absolutos no estrictos.

c) Cero en el intervalo $[-1, 1]$

Para $k \neq 0$, la función es continua en $[-1, 1]$, pues es producto de funciones continuas y el denominador no se anula. Además,

$$f(-1) = -k e^2, \quad f(1) = \frac{k}{e^2}, \quad f(-1)f(1) = -k^2 < 0.$$

Por el teorema de Bolzano existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$; en concreto, $c = 0$. Si $k = 0$, la función es cero en todo el intervalo. En ambos casos se cumple lo pedido.

Problema 6 · Área entre $y = x^2$ e $y = a$

El rectángulo R ocupa $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$; su área es

$$A_R = 2 \cdot 1 = 2.$$

Las curvas se cortan cuando $x^2 = a$, es decir, en $x = \pm\sqrt{a}$. En el intervalo central $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, la recta $y = a$ queda por encima de $y = x^2$; en los dos tramos laterales ocurre lo contrario. Por simetría respecto del eje y ,

$$A(a) = 2 \left[\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx \right].$$

Desarrollamos ambas integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx &= \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{2}{3} a^{3/2}, \\ \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{\sqrt{a}}^1 = \frac{1}{3} - a + \frac{2}{3} a^{3/2}. \end{aligned}$$

Sumamos las dos zonas y multiplicamos por 2:

$$A(a) = 2 \left(\frac{2}{3} a^{3/2} + \frac{1}{3} - a + \frac{2}{3} a^{3/2} \right) = \frac{8}{3} a^{3/2} + \frac{2}{3} - 2a.$$

La condición del enunciado es $A(a) = A_R/3 = 2/3$. Sustituimos:

$$\frac{8}{3} a^{3/2} + \frac{2}{3} - 2a = \frac{2}{3} \implies \frac{2}{3} a(4\sqrt{a} - 3) = 0.$$

Como $0 < a < 1$, no podemos tomar $a = 0$; queda $4\sqrt{a} - 3 = 0$. Por tanto,

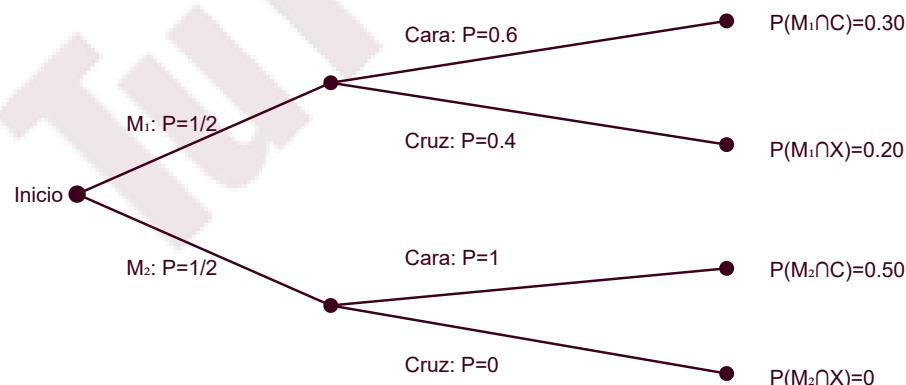
$$\sqrt{a} = \frac{3}{4} \implies a = \frac{9}{16}.$$

Se comprueba que $0 < 9/16 < 1$, así que la solución es admisible.

Problema 7 · Extracciones de monedas

La bolsa contiene dos monedas equiprobables. Para M_1 , $P(C | M_1) = 0.6$ y $P(X | M_1) = 0.4$; para M_2 , $P(C | M_2) = 1$ y $P(X | M_2) = 0$.

En una repetición se selecciona la moneda y luego se observa cara o cruz. El árbol muestra primero qué moneda sale y después el resultado:



Sumamos las rutas que terminan en cara y las que terminan en cruz:

$$P(C) = 0.30 + 0.50 = 0.80 = \frac{4}{5}, \quad P(X) = 0.20 = \frac{1}{5}.$$

Como la moneda se devuelve antes de cada repetición, las tres experiencias son independientes y conservan esas probabilidades.

a) Tres repeticiones

Sea Y el número de caras. Entonces $Y \sim B(3, 4/5)$. La probabilidad de tres caras es

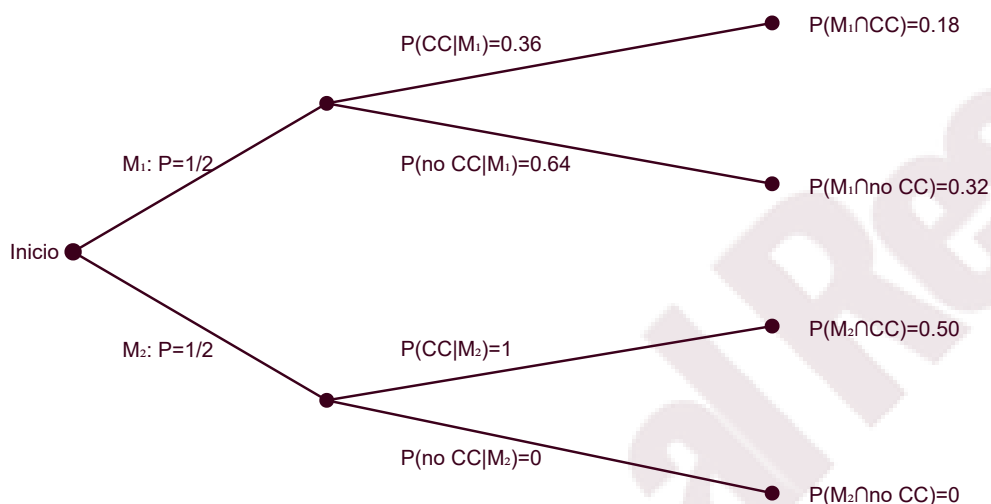
$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0.5120.$$

Para obtener exactamente una cruz debe haber dos caras y una cruz. Elegimos cuál de las tres posiciones ocupa la cruz y multiplicamos las probabilidades de esa secuencia:

$$P(\text{exactamente una cruz}) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125} = 0.3840.$$

b) Se observan dos caras: probabilidad de cada moneda

Ahora se elige la moneda una sola vez y se lanza dos veces. Las ramas finales relevantes son:



Las probabilidades condicionadas del árbol salen de multiplicar las de los dos lanzamientos:

$$P(CC | M_1) = 0.6^2 = 0.36, \quad P(CC | M_2) = 1^2 = 1.$$

La probabilidad total de observar dos caras es la suma de las dos rutas compatibles:

$$P(CC) = P(M_1)P(CC | M_1) + P(M_2)P(CC | M_2) = 0.5(0.36) + 0.5(1) = 0.68.$$

Aplicamos Bayes:

$$P(M_1 | CC) = \frac{0.5(0.36)}{0.68} = \frac{9}{34} \approx 0.2647, \quad P(M_2 | CC) = \frac{0.5(1)}{0.68} = \frac{25}{34} \approx 0.7353.$$

Las dos probabilidades suman 1, como deben hacerlo porque, tras observar dos caras, la moneda era M_1 o M_2 .

Problema 8 · Distribución binomial de ventas

La probabilidad de no vender en una llamada es **0.30**, por lo que la probabilidad de venta es

$$p = 1 - 0.30 = 0.70.$$

Sea X el número de ventas en diez llamadas. Suponiendo el mismo porcentaje en cada llamada y resultados independientes,

$$X \sim B(10, 0.7), \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0.7)^k (0.3)^{10-k}.$$

a) Más de 7 ventas

"Más de 7" significa $X = 8, 9, 10$. Aplicamos la fórmula binomial a esos tres valores:

$$\begin{aligned}
 P(X > 7) &= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} (0.7)^k (0.3)^{10-k} \\
 &= 45(0.7)^8 (0.3)^2 + 10(0.7)^9 (0.3) + (0.7)^{10} \\
 &= 0.2334744405 + 0.1210608210 + 0.0282475249 \\
 &= \boxed{0.3828}.
 \end{aligned}$$

b) Al menos 5 ventas

"Al menos 5" es $X \geq 5$. Es más sencillo restar los casos $X = 0, 1, 2, 3, 4$ de la probabilidad total:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 5) &= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} (0.7)^k (0.3)^{10-k} \\
 &= 1 - (0.0000059049 + 0.0001377810 + 0.0014467005 \\
 &\quad + 0.0090016920 + 0.0367569090) \\
 &= 1 - 0.0473489874 \\
 &= \boxed{0.9527}.
 \end{aligned}$$

c) Entre 3 y 8 ventas, ambos incluidos

El suceso es $3 \leq X \leq 8$. Sumamos las probabilidades de $X = 3, 4, 5, 6, 7, 8$:

$$\begin{aligned}
 P(3 \leq X \leq 8) &= \sum_{k=3}^8 \binom{10}{k} (0.7)^k (0.3)^{10-k} \\
 &= 0.0090016920 + 0.0367569090 + 0.1029193452 \\
 &\quad + 0.2001209490 + 0.2668279320 + 0.2334744405 \\
 &= \boxed{0.8491}.
 \end{aligned}$$