

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de julio de 2019

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y su ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right).$$

El determinante permite detectar los valores críticos:

$$\det A = 2(1 - k^2) = 2(1 - k)(1 + k).$$

Si $k \neq \pm 1$, el determinante es no nulo, luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Si $k = 1$, el menor de las dos primeras filas y columnas tiene determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada, el menor con columnas primera, segunda y de términos independientes vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A^*) = 3$. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

Si $k = -1$, el determinante es cero y el menor de las dos primeras filas y las columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

luego $\text{rg}(A) = 2$. La tercera fila de la ampliada es la suma de las dos primeras; por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$. Al ser ambos rangos iguales y menores que 3, el sistema es compatible indeterminado. **Conclusión.** El sistema es SCD para $k \neq \pm 1$, SI para $k = 1$ y SCD para $k = -1$.

b) Solución para $k = -1$

Con este valor, las ecuaciones se reducen a

$$-x + z = 0, \quad -x - y - z = 0, \quad -2x - y = 0.$$

La primera da $z = x$ y la segunda, sustituyendo, da $y = -2x$; la tercera queda entonces satisfecha. Tomando $x = t$,

$$(x, y, z) = (t, -2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $k = -1$, las soluciones son $(t, -2t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 2. Derivadas e integral

a) Regla de la cadena y derivada del cociente

Para $h(x) = f((x+1)^2)$ aplicamos la regla de la cadena: derivamos la función exterior y multiplicamos por la derivada de la interior:

$$h'(x) = f'((x+1)^2) 2(x+1), \quad h'(0) = f'(1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

Para $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ usamos la regla del cociente y sustituimos los datos en $x = 1$:

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Conclusión. $h'(0) = 4$ y $k'(1) = \frac{2}{9}$.

b) Integral con cambio de variable

Tomamos $t = \sin x$, de modo que $dt = \cos x dx$. Separamos un factor $\cos x$ y usamos $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx = \int (\sin x)^4 (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2) dt.$$

Integramos el polinomio y deshacemos el cambio:

$$\int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Conclusión. Una primitiva es $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$.

Opción A - Ejercicio 3. Plano, dependencia y volumen

Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 3, -3)$ y $C = (-3, -1, 1)$.

a) Plano que contiene a A , B y C

Construimos dos vectores del plano restando las coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, -4), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-4, -2, 0).$$

Un vector normal se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, 16, 8) = 8(-1, 2, 1).$$

Usando el normal $(-1, 2, 1)$ y el punto A ,

$$-(x-1) + 2(y-1) + (z-1) = 0 \implies x - 2y - z + 2 = 0.$$

Conclusión. El plano que pasa por los tres puntos es $x - 2y - z + 2 = 0$.

b) Punto D que hace dependientes los vectores

Basta escoger D de modo que $\overrightarrow{AD}$ sea combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Tomamos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$:

$$D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = B + C - A = (-3, 1, -3).$$

Este punto es distinto de A , B y C , y los tres vectores son dependientes porque $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. **Conclusión.** Un punto válido es $D = (-3, 1, -3)$.

c) Punto del eje OX que da volumen 1

Un punto del eje OX tiene forma $P = (t, 0, 0)$. El volumen de un tetraedro es una sexta parte del valor absoluto del determinante de tres aristas que parten de un vértice:

$$V = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})| = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}|.$$

Como $\overrightarrow{AP} = (t-1, -1, -1)$,

$$V = \frac{1}{6} |(-8, 16, 8) \cdot (t-1, -1, -1)| = \frac{4}{3} |t+2|.$$

Imponemos que el volumen sea 1:

$$\frac{4}{3} |t+2| = 1 \implies |t+2| = \frac{3}{4} \implies t = -\frac{5}{4} \text{ o } t = -\frac{11}{4}.$$

Conclusión. Los puntos son $P = (-\frac{5}{4}, 0, 0)$ y $P = (-\frac{11}{4}, 0, 0)$.

Opción A - Ejercicio 4. Selección y distribución normal

a) Probabilidad de seleccionar al menos a dos amigos

Suponemos que la selección de cada aspirante es independiente y tiene probabilidad $p = 0,4$. Entonces X , el número de seleccionados entre los ocho amigos, sigue $\text{Bin}(8, 0,4)$. «Al menos dos» significa $X \geq 2$; usamos el complementario para simplificar:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (0,6)^8 - \binom{8}{1} (0,4)(0,6)^7 = 0,89362432.$$

Conclusión. La probabilidad de que al menos dos sean seleccionados es 0,89362432.

b) Desviación típica de las puntuaciones

Estandarizamos usando $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. El dato $P(X \leq 8,2) = 0,67$ corresponde, según la tabla, a $z \approx 0,44$, ya que $\Phi(0,44) = 0,6700$. Por tanto,

$$\frac{8,2 - 5,6}{\sigma} = 0,44 \implies \sigma = \frac{2,6}{0,44} = \frac{65}{11} \approx 5,91.$$

Conclusión. La desviación típica es aproximadamente 5,91 puntos.

Opción B - Ejercicio 1. Ecuaciones y determinantes de matrices

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Valores para los que $A^2 - I = 2A$

Calculamos por separado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - I = \begin{pmatrix} (a-1)^2 & 2 \\ 2 & (a+1)^2 \end{pmatrix},$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas diagonales, $(a-1)^2 = 2-2a$ y $(a+1)^2 = 2+2a$; ambas ecuaciones se reducen a $(a-1)(a+1) = 0$. **Conclusión.** La igualdad se cumple para $a = 1$ o $a = -1$.

b) Invertibilidad e inversa de A

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante no es cero:

$$\det A = (1-a)(1+a) - 1 = -a^2.$$

Así, la inversa existe exactamente si $a \neq 0$. Para esos valores, la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 da

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. A es invertible si $a \neq 0$, y su inversa es la matriz indicada.

c) Determinante de $(AA^T)^2$

Usamos que el determinante de un cuadrado es el cuadrado del determinante y que $\det(A^T) = \det A$:

$$\det((AA^T)^2) = (\det(AA^T))^2 = (\det A \det A^T)^2 = (\det A)^4 = (-a^2)^4 = a^8.$$

Conclusión. $\det((AA^T)^2) = a^8$.

Opción B - Ejercicio 2. Evolución del brote

a) Función del número de enfermos

Integramos la derivada conocida:

$$F(t) = \int t^2(10-t) dt = \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C.$$

Al inicio, $F(0) = 6$, así que $C = 6$ y

$$F(t) = 6 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4.$$

Conclusión. El número de enfermos viene dado por $F(t) = 6 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$.

b) Máximo número de enfermos

Para hallar el máximo estudiamos el signo de $F'(t) = t^2(10-t)$ en $t \geq 0$. Es positivo si $0 < t < 10$ y negativo si $t > 10$; por ello la función crece hasta $t = 10$ y decrece después. El máximo es

$$F(10) = 6 + \frac{10}{3} \cdot 1000 - \frac{1}{4} \cdot 10000 = \frac{2518}{3} \approx 839,33.$$

Conclusión. El máximo se alcanza a los 10 días y es $\frac{2518}{3} \approx 839,33$ enfermos.

c) Duración del brote mediante Bolzano

El brote termina cuando el modelo vuelve a indicar cero enfermos, es decir, cuando $F(t) = 0$. La función F es un polinomio y, por tanto, continua. Además,

$$F(13) = \frac{2269}{12} > 0, \quad F(14) = -\frac{1354}{3} < 0.$$

Por el teorema de Bolzano existe al menos una raíz entre 13 y 14. Como $F'(t) < 0$ para $t > 10$, en ese intervalo la función es estrictamente decreciente y la raíz es única. Refinando el intervalo, $F(13,34) > 0$ y $F(13,35) < 0$, de modo que la duración es aproximadamente 13,34 días. **Conclusión.** El brote dura aproximadamente 13,34 días.

Opción B - Ejercicio 3. Simetría, recta perpendicular y ángulo

El plano es $\pi : 2x + 3y - z - 4 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (2, 3, -1)$.

a) Simétrico de $P = (1, 2, 3)$ respecto de π

El pie de la perpendicular se calcula con

$$H = P - \frac{\vec{n} \cdot P + d}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n},$$

para un plano $\vec{n} \cdot X + d = 0$. Aquí $d = -4$, $\vec{n} \cdot P + d = 1$ y $\|\vec{n}\|^2 = 14$, por lo que

$$H = P - \frac{1}{14}(2, 3, -1) = \left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right).$$

El simétrico P' tiene a H como punto medio de PP' , así que $P' = 2H - P$:

$$P' = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right).$$

Conclusión. El punto simétrico es $P' = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$.

b) Recta perpendicular a π por la intersección de r y s

La recta r es la intersección de $x + y - z = 0$ y $x + y + z = 2$. Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene $x + y = 1$ y $z = 1$; en forma paramétrica,

$$r : \quad x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La otra recta es $s : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$. Para hallar la intersección igualamos coordenadas. De la coordenada z , $1 = 3 + \lambda$, así que $\lambda = -2$; entonces el punto de s es $(-1, 2, 1)$, que pertenece también a r .

La recta perpendicular al plano tiene como vector director su normal $\vec{n} = (2, 3, -1)$. Al pasar por $(-1, 2, 1)$, queda

$$\ell : \quad x = -1 + 2u, \quad y = 2 + 3u, \quad z = 1 - u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta buscada es $\ell : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + u(2, 3, -1)$.

c) Ángulo entre r y s

Los vectores directores son $\vec{d}_r = (1, -1, 0)$ y $\vec{d}_s = (1, 0, 1)$. Para el ángulo agudo θ entre dos rectas usamos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{d}_s\|} = \frac{|1|}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. El ángulo entre las rectas es $\theta = 60^\circ$.

Opción B - Ejercicio 4. Probabilidad de defecto

Sean L y H los sucesos de que el vehículo sea de gama baja o alta, y D el de que sea defectuoso. Tenemos $P(L) = \frac{2}{3}$, $P(H) = \frac{1}{3}$, $P(D | L) = 0,016$ y $P(D | H) = 0,009$. En cada camino multiplicamos las probabilidades de las ramas y sumamos los casos incompatibles:

$$P(D) = P(D | L)P(L) + P(D | H)P(H) = 0,016 \cdot \frac{2}{3} + 0,009 \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{3000}.$$

Conclusión. La probabilidad de que el vehículo sea defectuoso es $\frac{41}{3000} \approx 0,01367$, es decir, aproximadamente 1,367 %.

b) Probabilidad de que el vehículo defectuoso sea de gama baja

Aplicamos Bayes porque conocemos que el vehículo tiene defecto y queremos identificar su gama:

$$P(L | D) = \frac{P(D | L)P(L)}{P(D)} = \frac{0,016 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{41}{3000}} = \frac{32}{41} \approx 0,7805.$$

Conclusión. Sabiendo que el vehículo es defectuoso, la probabilidad de que sea de gama baja es $\frac{32}{41} \approx 78,05$ %.