

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = a-1 + a(a-1) + 4 - (a+1)(a-1)2 - 2a-1 = a-1 + a^2 + a + 4 - 2(a^2-1) - 2a-1 =$$

$$= a^2 + 2 - 2a^2 + 2 = 4 - a^2$$

$$4 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Soluciones: $a = -2$ y $a = 2$

Para $a \neq -2$ y 2

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que **el sistema es compatible y determinado**.

Para $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A' ,

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \text{En } A, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \text{y} \quad \text{ran}(A') \geq 2$$

En A' , a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 2 + 12 + 4 + 1 = 18 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, luego **el sistema es incompatible**.

Para $a = 2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A' ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \text{y} \quad \text{ran}(A') \geq 2$$

$$\text{En } A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ las tres filas son iguales y } |I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 1$$

En A' , a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{ \text{como } C_3 = C_2 - C_1 \} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Luego, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$, luego **el sistema es compatible determinado**.

Por tanto,

Si $a \neq -2$ y 2 , Sistema Compatible Determinado

Si $a = -2$, Sistema Incompatible

Si $a = 2$, Sistema Compatible Indeterminado

b) ¿Soluciones del sistema cuando sea compatible?

Si $a \neq -2$ y 2 , Sistema Compatible Determinado

Lo resolvemos por Cramer,

Sabemos que la matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array} \right)$ y $|A| = 4 - a^2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{4 - a^2} = \frac{2(a-1) + a(a+1) - 2 + (a-1)(a+1) - 4a - 1}{4 - a^2} = \frac{2a - 2 + a^2 + a - 2 + a^2 - 1 - 4a - 1}{4 - a^2} = \frac{2a^2 - a - 6}{4 - a^2} = \frac{(a-2)(2a+3)}{-(a-2)(a+2)} = \frac{-(2a+3)}{a+2}$$

Factorizando el numerador, $2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 2a^2 - a - 6 = (a-2)(2a+3)$

y el denominador, $4 - a^2 = -(a^2 - 4) = -(a-2)(a+2)$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \frac{1-(a+1)+8-2(a+1)+2-2}{4-a^2} = \frac{9-3(a+1)}{4-a^2} = \frac{9-3a-3}{4-a^2} = \frac{6-3a}{4-a^2} = \frac{3(2-a)}{4-a^2} = \frac{3(a-2)}{a^2-4} = \frac{3(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{3}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \frac{-a+1+2a+2-4(a-1)-a+1}{4-a^2} = \frac{4-4a+4}{4-a^2} = \frac{8-4a}{4-a^2} = \frac{4a-8}{a^2-4} = \frac{4(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{4}{a+2}$$

{La simplificación efectuada en el cálculo de x, y, z se puede realizar porque $a \neq 2 \rightarrow a-2 \neq 0$ }

Si $a \neq -2$ y 2 , la solución es: $x = \frac{-(2a+3)}{a+2}$, $y = \frac{3}{a+2}$, $z = \frac{4}{a+2}$.

Si $a = 2$, Sistema Compatible Indeterminado

Del estudio realizado en el apartado a), el menor no nulo de orden 2 calculado nos indica las ecuaciones e incógnitas principales; en este caso 1ª y 2ª ecuaciones e y, z como incógnitas.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} y+3z=2-x \\ y+z=1-x \end{cases}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4-2x-3+3x}{-1} = \frac{1+x}{-1} = -1-x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1-x-2+x}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2. Sea dan los planos $\pi_1: x + y + z = a - 1$, $\pi_2: 2x + y + az = a$ y $\pi_3: x + ay + z = 1$.

- Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
- Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
- Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

Solución:

a) Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2$$

Resolvemos la ecuación: $-a^2 + 3a - 2 = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ & -1 & 2 & 0 \\ 2 & & -2 & \\ & -1 & 0 & \end{array} \quad \text{Soluciones: } a = 1 \text{ y } a = 2$$

Si $a \neq 1$ y $2 \rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, por lo que los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 1$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A' ,

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \text{En } A, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \text{ y } \text{ran}(A') \geq 2$$

En A' , a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible; por tanto los tres planos no se cortan en un elemento común.

Como $\pi_1: x + y + z = 0$ y $\pi_3: x + y + z = 1$, estos planos son paralelos {coeficientes de incógnitas iguales y términos independientes distintos}. El menor de orden 2 no nulo de A nos indica que π_2 corta a π_1 y π_3 .

Si $a = 2$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A' ,

$$\text{En } A, \left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \text{y} \quad \text{ran}(A') \geq 2$$

En A' , a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = \{C_1 = C_3\} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado (resolvemos dos incógnitas en función de otra); por tanto los tres planos se cortan en una recta.

Resumiendo,

Si $a \neq 1$ y 2 , los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 2$, los tres planos se cortan en una recta

Si $a = 1$, los tres planos no se cortan en un elemento común. π_1 y π_3 son paralelos y π_2 corta a ambos.

b) Si $a = 1$, ¿corte entre π_1 y π_3 ?

$$\pi_1: x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_3: x + y + z = 1.$$

Como los coeficientes de x, y, z son iguales y los términos independientes distintos, los dos planos son paralelos.

Luego, si $a = 1$ no hay recta de corte entre π_1 y π_3 .

c) Si $a = 2$, ¿corte entre π_1 y π_2 ?

$$\pi_1: x + y + z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_3: 2x + y + 2z = 2.$$

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \quad \{\text{calculado en apartado a)}\}$$

Por tanto el sistema tiene solución. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-2z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1-z-2+2z}{-1} = \frac{-1+z}{-1} = 1-z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-2z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2-2z-2+2z}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto, si } a = 2 \text{ los planos } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan en la recta: } \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 3. Consideremos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

- El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
- La integral $\int f(x) dx$. (4 puntos)

Solución:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$

Dom $f(x)$,

$$x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{-3}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$, las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 0$ y la asíntota horizontal es $y = 0$.

b) ¿Monotonía de $f(x)$?

Para estudiar la monotonía de esta función, usaremos la siguiente expresión de ella:

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)} \rightarrow y = \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

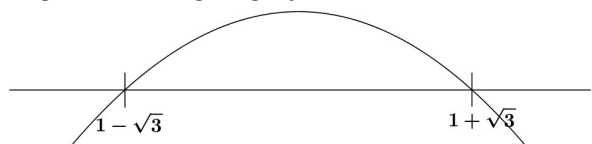
Debemos estudiar el signo de y' en su dominio.

$$y' = \frac{1(x^2+2x) - (x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{x^2+2x - (2x^2+2x-2x-2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2-2x+2}{(x^2+2x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

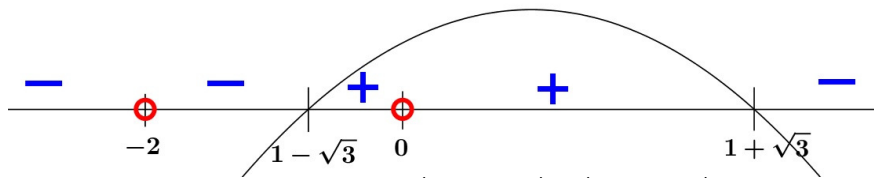
Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de y' sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$-x^2+2x+2=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.7321 \\ x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.7321 \end{cases}$$

Como $-x^2+2x+2$ es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de x^2 negativo, su signo gráficamente es:



Añadiendo los valores que no son del dominio de $f(x)$:



Por tanto, $f(x)$ es **creciente en** $(1-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 1+\sqrt{3})$ y
decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$.

c) $\int \frac{x-1}{x(x+2)} dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} \rightarrow x-1 = A(x+2) + Bx$$

$$x = -2 \rightarrow -2 - 1 = A(-2+2) + B(-2) \rightarrow -3 = -2B \rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$x = 0 \rightarrow 0 - 1 = A(0+2) + B \cdot 0 \rightarrow -1 = 2A \rightarrow A = \frac{-1}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x(x+2)} dx &= \int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} \right) dx = \int \frac{-1/2}{x} dx + \int \frac{3/2}{x+2} dx = \\ &= \frac{-1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Solución: $\int \frac{x-1}{x(x+2)} dx = \frac{-1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C$

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m . (4 puntos)
- Explicad cuando la matriz A es invertible. (2 puntos)
- Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. (4 puntos)

Solución:

a) ¿ $\text{ran}(A)$ en función de m ?

Estudiemos $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = -m(m^2 + 1) - 2m^2 = -m^3 - m = -m^3 - 2m^2 - m = -m(m^2 + 2m + 1) =$$

$$= -m(m+1)^2$$

$$-m(m+1)^2 = 0 \begin{cases} -m = 0 \rightarrow m = 0 \\ (m+1)^2 = 0 \rightarrow m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

Por tanto,

Si $m \neq -1$ y $0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{array}$$

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{array}$$

Finalmente,

Si $m \neq -1$ y 0 , $\text{ran}(A) = 3$

Si $m = -1$ o $m = 0$, $\text{ran}(A) = 2$

b) La matriz A , una matriz cuadrada, será invertible cuando su determinante sea distinto de 0.

Luego, A es invertible para $m \neq -1$ y 0

c) Para $m = 1$, resolved $XA = I$.

Si $m = 1$ $\{m \neq -1 \text{ y } 0\}$, por tanto A es invertible.

Conociendo A^{-1} , la solución de la ecuación $XA = I$ será:

Partimos de la ecuación a resolver: $XA = I$

Multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $XA A^{-1} = I A^{-1}$

Como $AA^{-1} = I$, queda: $X = A^{-1}$

$$\text{Si } m = 1, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sabemos que } |A| = -m(m+1)^2 \rightarrow |A|_{m=1} = [-m(m+1)^2]_{m=1} = -1(1+1)^2 = -4$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 5. Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- Calculad la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
- Calculad el punto P' que es el simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
- La ecuación del plano π' que pasa por P y es paralelo a π . (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $d(P, \pi)$?

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Solución: $d(P, \pi) = \sqrt{14}$ u.l.

b) ¿ P' ? / P' es el simétrico de P respecto de π

1º) Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π

$$\text{De la recta } r \text{ conocemos: } \begin{cases} \text{punto } P(1,2,3) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3,2,1) \end{cases}$$

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } r, \quad r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2º) Punto de corte entre r y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4 = 0$$

$$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda + 14 = 0 \rightarrow 14\lambda = -14 \rightarrow \lambda = \frac{-14}{14} = -1$$

$$\text{Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta: } \begin{cases} x = 1 + 3(-1) = -2 \\ y = 2 + 2(-1) = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Entonces $M(-2, 0, 2)$.

3º) El cálculo de P' podemos realizarlo de dos formas.

a) P' será tal que $\frac{P + P'}{2} = M$

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2(-2, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-4, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-5, -2, 1)$$

b) ¿ $Q \in r$? / $d(Q, \pi) = \sqrt{14}$

$$d(Q, \pi) = \sqrt{14} \rightarrow \frac{|3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$|3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4| = 14; \quad |3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4| = 14$$

$$|14\lambda + 14| = 14; \quad \begin{cases} 14\lambda + 14 = 14; & 14\lambda = 0; & \lambda = 0; & Q(1, 2, 3) = P \\ 14\lambda + 14 = -14; & 14\lambda = -28; & \lambda = -2; & Q(-5, -2, 1) = P' \end{cases}$$

Solución: $P'(-5, -2, 1)$.

c) ¿ π' ? / $P' \in \pi'$ y $\pi' // \pi$

$$\text{Como } \pi' // \pi \rightarrow \pi': 3x + 2y + z + D = 0$$

$$\text{Como } P' \in \pi' \rightarrow 3(-5) + 2(-2) + 1 + D = 0$$

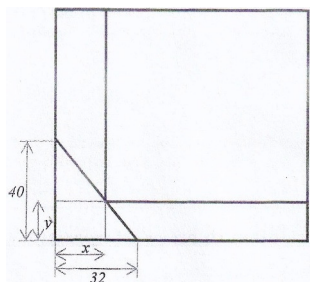
$$-15 - 4 + 1 + D = 0; \quad -18 + D = 0; \quad D = 18$$

Solución, $\pi': 3x + 2y + z + 18 = 0$

Tu Profe al Rescate

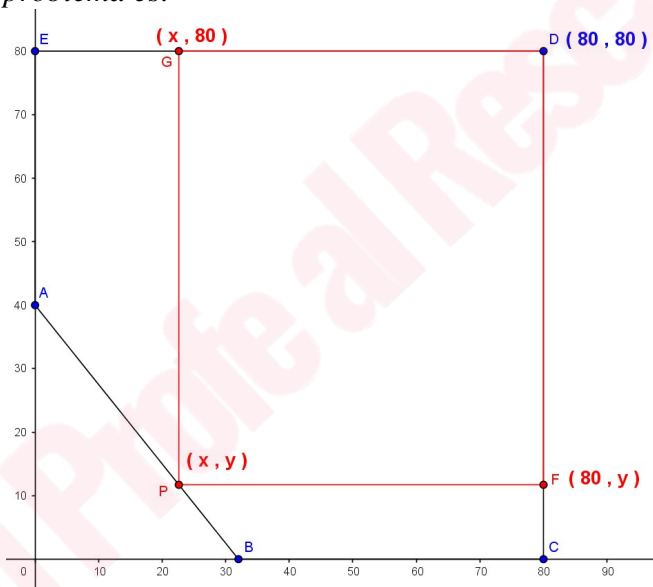
Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectángulo R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)
- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
- Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



Solución:

La representación gráfica del problema es:



a) Área del rectángulo R de vértices $PFDG$

El lado PF mide $(80 - x)$ cm, el lado PG mide $(80 - y)$ cm. El área del rectángulo R quedaría en función de x e y . Para expresar el área de R en función de x , consideramos que el punto $P(x, y) \in \overline{AB}$.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B para expresar y en función de x .

$$\begin{cases} A = (0, 40) \\ B = (32, 0) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto } (0, 40) \\ \text{v. director } (32, -40) \approx (4, -5) \end{cases}$$

$$\text{luego } r: \frac{x-0}{4} = \frac{y-40}{-5} \rightarrow -5x = 4y - 160 \rightarrow 4y = -5x + 160 \rightarrow y = \frac{-5x + 160}{4} = \frac{-5}{4}x + 40$$

El área de rectángulo R será:

$$A_R = (80 - x)(80 - y) = (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x \right)$$

$$80 - y = 80 - \left(\frac{-5}{4}x + 40 \right) = 80 + \frac{5}{4}x - 40 = 40 + \frac{5}{4}x$$

$$\text{Solución: } A_R = (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x \right) \text{ cm}^2 \quad 0 \leq x \leq 32$$

b) Valor de x / A_R es máxima.

$$A_R = (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x \right) \quad 0 \leq x \leq 32$$

$$A'_R = - \left(40 + \frac{5}{4}x \right) + (80 - x) \frac{5}{4} = -40 - \frac{5}{4}x + 100 - \frac{5}{4}x = 60 - \frac{5}{2}x$$

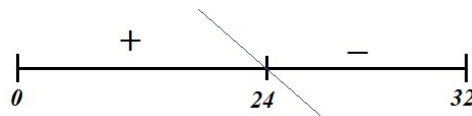
$$60 - \frac{5}{2}x = 0; \quad 120 - 5x = 0; \quad 120 = 5x; \quad x = \frac{120}{5} = 24 \in (0, 32)$$

$$A''_R = -\frac{5}{2}$$

Para $x = 24$, $A''_R = -\frac{5}{2} < 0 \rightarrow$ en $x = 24$ A_R tiene un máximo relativo

Estudiemos el signo de A'_R a la izquierda y derecha de 24.

Como A'_R es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 24:



Luego en $x = 24$ A_R tiene un máximo relativo que es el absoluto en $[0, 32]$ ya que a la izquierda de 24 A_R es creciente y a la derecha es decreciente.

Las dimensiones de R son:

$$80 - x = 80 - 24 = 56 \quad \text{y} \quad 40 + \frac{5}{4}x = 40 + \frac{5}{4} \cdot 24 = 70$$

Solución: las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima son 56 cm x 70 cm.

c) El área máxima será, $A_R = 56 \cdot 70 = 3920$

Solución: el área máxima del rectángulo R mide 3920 cm^2 .

(Este ejercicio es similar al B3 de Junio de 2014)