

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de 2026 - Coincidencias

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Probabilidad condicionada

Definimos I : «la persona está infectada» y S : «presenta síntomas». Los datos son

$$P(I) = 0,40, \quad P(S | I) = 0,95, \quad P(S | I^c) = 0,005.$$

Por tanto, $P(I^c) = 0,60$. Para invertir la condición del primer apartado usaremos Bayes; el denominador se obtiene sumando los casos infectados y no infectados que producen síntomas.

a) Probabilidad de infección sabiendo que hay síntomas

$$\begin{aligned} P(I | S) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{P(I)P(S | I)}{P(I)P(S | I) + P(I^c)P(S | I^c)} \\ &= \frac{0,40 \cdot 0,95}{0,40 \cdot 0,95 + 0,60 \cdot 0,005} = \frac{0,38}{0,383} = \frac{380}{383} \approx 0,9922. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que la persona esté infectada es aproximadamente 99,22 %.

b) Al menos una persona infectada entre dos con síntomas

La probabilidad de que una persona no esté infectada, sabiendo que tiene síntomas, es

$$P(I^c | S) = \frac{0,60 \cdot 0,005}{0,383} = \frac{3}{383}.$$

Si elegimos dos personas independientemente, la probabilidad de que ninguna esté infectada es el producto de esas probabilidades. Usamos el suceso complementario para obtener «al menos una»:

$$P(\text{al menos una infectada} | \text{ambas con síntomas}) = 1 - \left(\frac{3}{383}\right)^2 = \frac{146680}{146689} \approx 0,99994.$$

Conclusión. La probabilidad de que al menos una esté infectada es aproximadamente 99,994 %.

Pregunta 2 - Estudio de una potencia e integral

La potencia se mide en kilovatios y depende de la hora t . En los tramos primero y último vale 0; entre las horas 8 y 20 es

$$P(t) = 3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right).$$

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; potencia máxima

En el tramo sinusoidal, el signo de la derivada indica si la potencia crece o decrece:

$$P'(t) = \frac{3\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right).$$

Para $8 < t < 20$, el ángulo del coseno varía de $-\pi/2$ a π . El coseno es positivo hasta que ese ángulo alcanza $\pi/2$, lo que ocurre en $t = 16$; después es negativo. Así, P crece entre las horas 8 y 16 y decrece entre las horas 16 y 20. En los otros tramos indicados se mantiene en cero. En $t = 16$,

$$P(16) = 3 + 3 \sin(\pi/2) = 6.$$

En $t = 20$ el tramo sinusoidal da $P(20) = 3$, y para $t > 20$ la expresión pasa a cero, por lo que hay un salto al terminar ese tramo. El enunciado no asigna valor a $P(24)$; este detalle no afecta a la monotonía en los intervalos abiertos ni al cálculo de la energía. **Conclusión.** La potencia máxima es 6 kW y se alcanza a las 16:00.

b) Energía producida durante el día

La energía es la integral de la potencia respecto del tiempo. Como la potencia solo es distinta de cero entre las horas 8 y 20, integramos en ese intervalo:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{24} P(t) dt = \int_8^{20} \left[3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right) \right] dt \\ &= \left[3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right) \right]_8^{20} \\ &= 36 + \frac{24}{\pi} \text{ kWh.} \end{aligned}$$

El valor asignado a un único extremo no cambia una integral definida. **Conclusión.** La energía producida es $36 + \frac{24}{\pi}$ kWh.

Pregunta 3 - Matrices triangulares superiores

Los elementos de S tienen la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Estabilidad de S por el producto

Tomamos dos matrices cualesquiera de S :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

Al multiplicarlas,

$$MN = \begin{pmatrix} ac & ad + b(c+d) \\ 0 & (a+b)(c+d) \end{pmatrix}.$$

La suma de las entradas superior izquierda y superior derecha es

$$ac + ad + b(c+d) = (a+b)(c+d),$$

que coincide con la entrada inferior derecha. Por tanto, el producto vuelve a tener la forma que define S .

Conclusión. Si $M, N \in S$, entonces $MN \in S$.

b1) Invertibilidad y pertenencia de la inversa a S

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, el determinante es el producto de la diagonal:

$$\det M = a(a+b).$$

La matriz es invertible si y solo si ambos factores son distintos de cero. En ese caso, la inversa de una matriz triangular es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a(a+b)} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}.$$

La suma de sus dos entradas superiores es

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)} = \frac{a+b-b}{a(a+b)} = \frac{1}{a+b},$$

igual a la entrada inferior derecha. Así, la inversa también cumple la condición que define S . **Conclusión.** M es invertible exactamente cuando $a \neq 0$ y $a+b \neq 0$; en ese caso, $M^{-1} \in S$.

b2) Matrices idempotentes de S

Una matriz es idempotente si $M^2 = M$. Calculamos la potencia y comparamos entradas:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab + b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Las entradas diagonales exigen $a^2 = a$ y $(a+b)^2 = a+b$, de modo que $a \in \{0, 1\}$ y $a+b \in \{0, 1\}$. La entrada superior derecha exige $b(2a+b-1) = 0$. Combinando las condiciones obtenemos las cuatro parejas (a, b) :

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 0).$$

Conclusión. Las matrices idempotentes son $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 4 - Geometría en el espacio

4.1 a) Posición relativa de la recta y el plano

La recta se escribe en forma paramétrica como

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por ello, tiene vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $P = (1, 1, 1)$. El plano $\pi : x + y + z = 0$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Como

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0,$$

$\vec{v} = \vec{n}$, de modo que la recta es perpendicular al plano y, en particular, lo corta en un punto. Sustituimos la parametrización de la recta en la ecuación del plano:

$$(1 + t) + (1 + t) + (1 + t) = 0 \implies 3(1 + t) = 0 \implies t = -1.$$

El punto de intersección es $(0, 0, 0)$. **Conclusión.** La recta es secante al plano y lo corta en el origen $(0, 0, 0)$.

4.1 b) Puntos a distancia $\sqrt{3}$ del plano

Un punto de la recta corresponde al parámetro t . Aplicamos la fórmula de distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $x + y + z = 0$:

$$d = \frac{|x_0 + y_0 + z_0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}.$$

En la recta, la suma de coordenadas es $3(1 + t)$. Imponemos la distancia indicada:

$$\frac{|3(1 + t)|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \implies |1 + t| = 1 \implies t = 0 \text{ o } t = -2.$$

Sustituyendo esos parámetros en la recta:

$$t = 0 \Rightarrow (1, 1, 1), \quad t = -2 \Rightarrow (-1, -1, -1).$$

Conclusión. Los puntos buscados son $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, -1)$.

4.2 a) Dos planos perpendiculares que contienen a r

La recta se escribe en forma paramétrica como

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 1, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tiene vector director $\vec{v} = (1, 0, 1)$ y pasa por $P_0 = (0, 1, 0)$. Para obtener el primer plano que contiene a r y pasa por $Q = (0, 0, 1)$, calculamos un vector normal mediante el producto vectorial de $\vec{v}$ y $\overrightarrow{P_0Q} = (0, -1, 1)$:

$$\vec{n}_1 = \vec{v} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

El plano por P_0 con esa normal es $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$; al sustituir Q se comprueba que también pasa por él.

Buscamos el segundo plano con normal perpendicular tanto a $\vec{v}$ (para que contenga a r) como a $\vec{n}_1$ (para que sea perpendicular a π_1). Podemos tomar

$$\vec{n}_2 = \vec{v} \times \vec{n}_1 = (1, 2, -1), \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

El plano por P_0 con normal $\vec{n}_2$ es $\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0$. Ambos contienen a r , y sus normales perpendiculares garantizan que los planos forman 90° . **Conclusión.** Una pareja de planos que cumple las condiciones es $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0$.

4.2 b) Rectas de esos planos disjuntas de r

En cada plano, una recta distinta de r o bien la corta, o bien es paralela a ella, porque dos rectas coplanarias que no se cortan son paralelas. Si una recta contenida en cualquiera de π_1 o π_2 no tiene puntos en común con r , necesariamente es paralela a r . Por tanto, todas las rectas con esa propiedad tienen vectores directores proporcionales al de r . **Conclusión.** Todas esas rectas son paralelas entre sí, pues todas son paralelas a r .

Pregunta 5 - Asíntotas e integral

5.1 a) Asíntota vertical en $x = 2$ y restantes asíntotas

Para que el denominador se anule en $x = 2$ debe ser $3 \cdot 2 - a = 0$, luego $a = 6$. El numerador en ese punto vale $2^2 - 1 = 3 \neq 0$, así que no se cancela el factor del denominador. Los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = +\infty,$$

por lo que $x = 2$ es una asíntota vertical.

Para las horizontales, estudiamos los límites en ambos extremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = -\infty.$$

No hay asíntota horizontal. Para la oblicua calculamos primero la pendiente m y después la ordenada n :

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

También se ve al dividir:

$$\frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{x - 2}.$$

Conclusión. Para $a = 6$, las asíntotas son la vertical $x = 2$ y la oblicua $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$; no hay horizontal.

5.1 b) Valores de a sin asíntotas verticales

El denominador se anula en $x = a/3$. Para que no haya asíntota vertical, el numerador también debe anularse en ese punto:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 1 = 0 \implies a^2 = 9 \implies a = 3 \text{ o } a = -3.$$

En esos casos se cancela un factor común y queda una discontinuidad evitable: para $a = 3$, $f(x) = (x + 1)/3$ si $x \neq 1$; para $a = -3$, $f(x) = (x - 1)/3$ si $x \neq -1$. El límite en cada punto es finito, así que no aparece una asíntota vertical. **Conclusión.** Los valores son $a = 3$ y $a = -3$.

5.2 Integral de $xf(x)$

Usamos el cambio $u = x^2 - 1$, para el que $du = 2x dx$. Los límites pasan de $x = 0, 2$ a $u = -1, 3$. Como aparece $|u|$, separamos la integral en $u = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sin(\pi|x^2 - 1|) dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \sin(\pi|u|) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \sin(-\pi u) du + \int_0^3 \sin(\pi u) du \right). \end{aligned}$$

Cada integral vale $2/\pi$:

$$\int_{-1}^0 \sin(-\pi u) du = \frac{2}{\pi}, \quad \int_0^3 \sin(\pi u) du = \left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi} \right]_0^3 = \frac{2}{\pi}.$$

Conclusión. El valor de la integral es $\frac{2}{\pi}$.