

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Discusión de un sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{pmatrix}.$$

Como A es cuadrada, empezamos por su determinante:

$$\det A = 2(m-1)(m+3).$$

Si $m \neq 1, -3$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A) = 3$, el número de incógnitas. Por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Quedan los valores que anulan el determinante. Para $m = 1$, el sistema queda

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ -x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

La tercera ecuación es la opuesta de la segunda y las dos primeras son independientes (el menor de sus dos primeras columnas vale 3). Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: es compatible indeterminado. La solución se expresa en el apartado b).

Para $m = -3$, las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

El menor de las dos primeras columnas de A vale -1 , por lo que su rango es al menos 2; como $\det A = 0$, su rango es exactamente 2. En la ampliada, el menor formado por las columnas de x, y y la columna independiente es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** Si $m \neq 1, -3$, el sistema es compatible determinado (SCD); si $m = 1$, es compatible indeterminado (SCI); y si $m = -3$, es incompatible (SI).

b) Solución para $m = 1$

Al sustituir $m = 1$, las dos ecuaciones independientes son $2x + y - z = 0$ y $x + 2y - z = 0$. Al restarlas, obtenemos $x - y = 0$, es decir, $x = y$. Sustituyendo en la primera, $z = 3x$. Tomando $x = t$:

$$(x, y, z) = (t, t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $m = 1$, las soluciones son $(x, y, z) = (t, t, 3t)$, con t real.

A.2. Dominio, monotonía y área

Consideramos $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Como el denominador no puede anularse, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Crecimiento y decrecimiento

El signo de la derivada indica la monotonía en cada intervalo del dominio:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Para todo $x \neq 0$, $x^2 > 0$ y, por tanto, $f'(x) < 0$. El punto 0, excluido del dominio, divide la recta en dos intervalos; en cada uno la función es decreciente. **Conclusión.** f decrece en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$; no tiene intervalos de crecimiento.

b) Área limitada por $f(x)$ y $g(x) = \frac{5-x}{2}$

Primero hallamos los puntos de corte:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{5-x}{2} \implies 2x + 2 = 5x - x^2 \implies (x-1)(x-2) = 0.$$

Las curvas se cortan en $x = 1$ y $x = 2$. En $(1, 2)$, por ejemplo en $x = \frac{3}{2}$, se tiene $g(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} > f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$; por ello el área es la integral de función superior menos función inferior:

$$A = \int_1^2 \left(\frac{5-x}{2} - 1 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} - \ln x \right]_1^2.$$

Evaluyendo:

$$A = (2 - \ln 2) - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

Este valor es positivo, como debe ocurrir con un área. **Conclusión.** El área encerrada entre las dos gráficas es $\frac{3}{4} - \ln 2$ unidades cuadradas.

A.3. Rectas en el espacio y condiciones de perpendicularidad

La recta dada está en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

con vector director $\vec{u} = (1, 1, 0)$; el punto $P = (1, 1, 0)$ pertenece a ella.

a) Puntos de r a distancia uno de P

Un punto de r es $R(\lambda) = (\lambda, \lambda, 0)$. Usamos la fórmula de distancia entre puntos e imponemos que valga 1:

$$PR = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{2} |\lambda - 1| = 1.$$

Así, $|\lambda - 1| = 1/\sqrt{2}$, luego $\lambda = 1 \pm 1/\sqrt{2}$. Al tomar los dos signos en la expresión anterior, obtenemos los dos puntos:

$$R_{\pm} = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Conclusión. Los puntos buscados son R_+ y R_- .

b) Rectas por P , perpendiculares a r y con el ángulo indicado

Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ el vector director de una recta buscada. La perpendicularidad a r exige

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \implies a + b = 0.$$

Un vector normal al plano $x = 0$ es $\vec{n} = (1, 0, 0)$. Para que el ángulo entre la dirección de la recta y dicha normal sea $\pi/3$, usamos la fórmula del producto escalar:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2}}.$$

Al elevar al cuadrado resulta $c^2 = 2a^2$. Como un vector director no puede ser nulo, podemos tomar $a = 1$. Así aparecen las dos direcciones $(1, -1, \sqrt{2})$ y $(1, -1, -\sqrt{2})$. Por un punto y un vector director, las rectas en forma paramétrica son

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Las dos rectas pedidas son r_1 y r_2 .

A.4. Probabilidad condicionada y aproximación normal

Sean A y B los sucesos "el cliente compra el producto A" y "compra el producto B". Los datos son $P(A) = 0,62$, $P(B) = 0,40$ y $P(A \cap B) = 0,12$.

a) Compra A sabiendo que no compra B

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}.$$

Como A se divide en los casos incompatibles $A \cap B$ y $A \cap \bar{B}$, se tiene $P(A \cap \bar{B}) = 0,62 - 0,12 = 0,50$. Además, $P(\bar{B}) = 1 - 0,40 = 0,60$. Por tanto,

$$P(A | \bar{B}) = \frac{0,50}{0,60} = \frac{5}{6}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{5}{6}$.

b) No compra ninguno de los dos productos

Primero calculamos la probabilidad de que compre al menos uno mediante inclusión-exclusión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,62 + 0,40 - 0,12 = 0,90.$$

El suceso "ninguno" es el complementario, por lo que

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,10.$$

Conclusión. La probabilidad de que no compre ninguno es 0,10.

c) Más de 1250 compras de B entre 3000 personas

Sea X el número de clientes que compran B. Bajo el modelo binomial, $X \sim \text{Bin}(3000, 0,4)$, con

$$\mu = np = 1200, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3000 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{720}.$$

"Más de 1250" significa $X \geq 1251$. Al aproximar por la normal $Y \sim N(1200, \sqrt{720})$, la corrección de continuidad conduce a

$$P(X \geq 1251) \approx P(Y > 1250,5) = P\left(Z > \frac{1250,5 - 1200}{\sqrt{720}}\right) = P(Z > 1,8826) \approx P(Z > 1,88).$$

La tabla da $P(Z < 1,88) = 0,9699$, así que $P(Z > 1,88) = 1 - 0,9699 = 0,0301$. **Conclusión.** La probabilidad aproximada es 0,0301.

B.1. Sistemas lineales y productos de matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Compatibilidad de $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El menor de las dos últimas filas y las dos columnas de incógnitas vale

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(C) = 2$ para cualquier a . Las ecuaciones segunda y tercera determinan x, y :

$$3x + 2y = 1, \quad x + y = 1 \implies x = -1, \quad y = 2.$$

La primera ecuación se cumple entonces si y solo si $(a+2)(-1) + 2 = 1$, es decir, $a = -1$. Equivalentemente, $\det(C^*) = a + 1$: para $a \neq -1$, el rango ampliado es 3 y el sistema es incompatible; para $a = -1$, ambos rangos son 2, igual al número de incógnitas, y el sistema es compatible determinado. **Conclusión.** El sistema es compatible únicamente para $a = -1$; en ese caso su solución es $(x, y) = (-1, 2)$.

b) Valores para que el producto de dos matrices sea la restante

Por sus dimensiones, las únicas igualdades posibles entre productos de dos matrices distintas y la tercera son $AB = B$, $BC = A$ y $CA = C$. Las matrices B y C tienen rango 2 para cualquier parámetro: en B un menor de orden dos vale -2 , y en C vale 1. Por ello, $AB = B$ o $CA = C$ exigirían $A = I$, lo que es imposible porque la entrada de la primera fila y segunda columna de A es 8. Solo queda comprobar $BC = A$.

$$BC = \begin{pmatrix} (a+2)+6+3 & 1+4+3 \\ 2(a+2)+3(a+c)+4 & 2+2(a+c)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2a+2c+6 \end{pmatrix}.$$

Igualemos sus entradas con las de A :

$$c = a + 11, \quad 5a + 3c + 8 = 1, \quad b + c = 2a + 2c + 6.$$

De las dos primeras, $a = -5$ y $c = 6$; la última da $b = 2$. **Conclusión.** Los valores son $a = -5$, $b = 2$ y $c = 6$, y entonces $BC = A$.

B.2. Derivadas de funciones compuestas y Teorema del Valor Medio

Se conocen $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$, y se definen $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = f(f(x))$.

a) Valores de $g(2)$ y $g'(2)$

Al evaluar la definición, $g(2) = (f(2))^2 = 1$. Para derivar usamos la regla de la cadena:

$$g'(x) = 2f(x)f'(x), \quad g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$$

Conclusión. $g(2) = 1$ y $g'(2) = 4$.

b) Tangente a h en $x = 1$

Primero calculamos el punto: $h(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$. La regla de la cadena da

$$h'(x) = f'(f(x))f'(x), \quad h'(1) = f'(2)f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

La recta tangente con pendiente 2 que pasa por $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 1.$$

Conclusión. La recta tangente a la gráfica de h en $x = 1$ es $y = 2x - 1$.

c) Aplicación del Teorema del Valor Medio

La función f es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$, que son las hipótesis del Teorema del Valor Medio. Por tanto, existe $c \in (1, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 2}{1} = -1.$$

Conclusión. Existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ para el que $f'(c) = -1$.

B.3. Vectores, volumen y perpendicular común

a) Ángulo entre dos vectores

Para el ángulo entre $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$ usamos

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Aquí $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$, $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 2$, luego $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Conclusión.** El ángulo entre los vectores es $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianes.

b) Volumen del paralelepípedo

Las aristas concurrentes desde el origen son

$$\vec{OA} = (2, 0, 0), \quad \vec{OB} = (0, 3, 0), \quad \vec{OC} = (0, 2, 2\sqrt{3}).$$

El volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de los tres vectores:

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 12\sqrt{3}.$$

Conclusión. El volumen es $12\sqrt{3}$ unidades cúbicas.

c) Recta perpendicular común a r y s

Escribimos ambas rectas en forma paramétrica. La recta por O y C tiene dirección $(0, 1, \sqrt{3})$, y la otra tiene dirección $(1, 0, 0)$:

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = u \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

Sean $R = (0, t, \sqrt{3}t) \in r$ y $S = (u, 3, 0) \in s$. Para que el segmento RS sea perpendicular a ambas direcciones, imponemos el producto escalar nulo con cada una:

$$\vec{RS} = (u, 3 - t, -\sqrt{3}t), \quad \vec{RS} \cdot (1, 0, 0) = u = 0,$$

$$\vec{RS} \cdot (0, 1, \sqrt{3}) = 3 - t - 3t = 0 \implies t = \frac{3}{4}.$$

Así, $R = (0, \frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ y $S = (0, 3, 0)$. El vector $\vec{RS} = (0, \frac{9}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ es proporcional a $(0, \sqrt{3}, -1)$. Esta dirección es perpendicular a las de r y s , pues

$$(0, \sqrt{3}, -1) \cdot (0, 1, \sqrt{3}) = 0, \quad (0, \sqrt{3}, -1) \cdot (1, 0, 0) = 0.$$

Por tanto, la recta perpendicular común que pasa por R es

$$\ell : \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{3}{4} + \sqrt{3}\lambda, \\ z = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

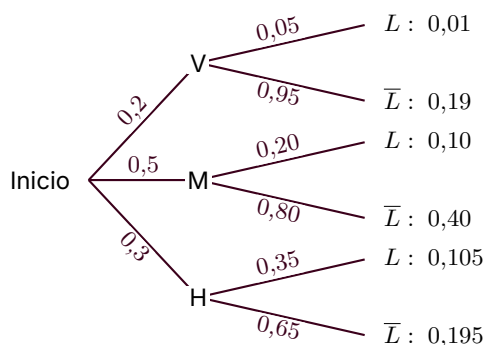
Conclusión. Una ecuación paramétrica de la perpendicular común es ℓ .

B.4. Probabilidad total y probabilidad condicionada

Definimos V , M y H como los sucesos de que una publicación trate de viajes, moda o maternidad, y L como que reciba menos de 20 000 Me gusta. Las probabilidades de los temas son

$$P(V) = 0,2, \quad P(M) = 0,5, \quad P(H) = 0,3.$$

Las probabilidades de pocas interacciones condicionadas al tema son $P(L | V) = 0,05$, $P(L | M) = 0,20$ y $P(L | H) = 0,35$. En el árbol, cada probabilidad conjunta se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas del camino:



a) Más de 20 000 Me gusta

Sumamos las probabilidades de los tres caminos que terminan en L :

$$P(L) = 0,01 + 0,10 + 0,105 = 0,215 = \frac{43}{200}.$$

El enunciado no proporciona la probabilidad de obtener exactamente 20 000 Me gusta. Adoptamos la interpretación habitual del ejercicio de que el umbral separa dos casos complementarios, es decir, que la probabilidad de ese valor exacto es nula. Entonces,

$$1 - P(L) = 1 - \frac{43}{200} = \frac{157}{200} = 0,785.$$

Conclusión. Bajo esa interpretación, la probabilidad es $\frac{157}{200} = 0,785$.

b) Viajes sabiendo que recibe menos de 20 000 Me gusta

Usamos la fórmula de probabilidad condicionada. El camino de viajes y pocas interacciones tiene probabilidad conjunta $0,2 \cdot 0,05 = 0,01$:

$$P(V | L) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,01}{0,215} = \frac{2}{43} \approx 0,0465.$$

Conclusión. La probabilidad de que trate de viajes, sabiendo que recibe menos de 20 000 Me gusta, es $\frac{2}{43} \approx 0,0465$.