

Modelo 6 de 2005

Primitivas, áreas, sistemas lineales y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

Integramos $f'(x) = 2x$:

$$f(x) = x^2 + C.$$

La condición $f(0) = 2$ da $C = 2$, así que $f(x) = x^2 + 2$. Esta función es positiva en $[-2, 2]$, por lo que el área coincide con la integral definida:

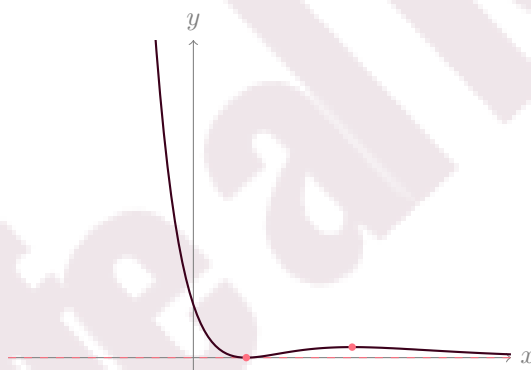
$$S = \int_{-2}^2 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^2 = \frac{40}{3}.$$

Opción A - Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales. Como $(x-1)^2 e^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$, $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha; al tender x a $-\infty$, la función crece sin cota y no hay asíntota horizontal ni oblicua. Derivando,

$$f'(x) = e^{-x}(x-1)(3-x).$$

La derivada es negativa en $(-\infty, 1)$, positiva en $(1, 3)$ y negativa en $(3, +\infty)$. Hay un mínimo absoluto en $(1, 0)$ y un máximo local en $(3, 4e^{-3})$. La función no tiene máximo absoluto, pues $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.



Opción A - Ejercicio 3

Sean r, m, p los pesos de una sortija, una moneda y un pendiente. Los datos proporcionan

$$r + m + p = 30, \quad 4r + 3m + 2p = 90.$$

Restando dos veces la primera ecuación de la segunda se obtiene $2r + m = 30$. Junto con la primera,

$$p = r, \quad m = 30 - 2r.$$

Si el objeto irreconocible pesara 18 g y fuera sortija o pendiente, tendríamos $r = p = 18$ y $m = -6$, imposible. Si fuera moneda, $m = 18$ da $r = p = 6$, pesos positivos que cumplen los datos. Por tanto, el objeto es una moneda.

Opción A - Ejercicio 4

La recta se parametriza como

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 1, 2).$$

El normal del plano es $n = (1, 1, m)$ y la dirección de la recta es $d = (1, 1, 2)$.

- Para que la recta sea paralela al plano, $d \cdot n = 0$: $2 + 2m = 0$, luego $m = -1$. En ese caso, el punto $(0, 1, 2)$ no pertenece al plano, así que la recta es paralela sin estar contenida.
- Para que la recta sea perpendicular al plano, d debe ser paralelo a n , lo que da $m = 2$.
- Para que esté contenida, debe ser paralela y además contener uno de sus puntos. El único candidato es $m = -1$, pero al sustituir $(0, 1, 2)$ en $x + y - z = 3$ se obtiene $-1 \neq 3$. Por tanto, no existe ningún valor de m .

Opción B - Ejercicio 1

En $x = 3$, $f'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$. La tangente en el punto $(3, 6)$ es

$$y - 6 = -(x - 3) \implies \boxed{y = -x + 9}.$$

Para estudiar la monotonía, buscamos los ceros de las expresiones de f' en sus respectivos tramos. En $(0, 1)$, $5x - 2 = 0$ da $x = 2/5$; en $[1, 5)$,

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$$

da $x = 2, 4$. El signo de la primera expresión cambia de negativo a positivo en $2/5$; la segunda es positiva en $[1, 2)$, negativa en $(2, 4)$ y positiva en $(4, 5)$. Por ello f decrece en $(0, 2/5)$, crece en conjunto en $(2/5, 2)$, decrece en $(2, 4)$ y crece en $(4, 5)$. Los extremos interiores son un máximo local en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 4$. Usando $f(3) = 6$ e integrando f' entre los puntos,

$$\int_2^3 (x^2 - 6x + 8)dx = -\frac{2}{3}, \quad \int_3^4 (x^2 - 6x + 8)dx = -\frac{2}{3}.$$

Así, $f(2) = 20/3$ y $f(4) = 16/3$. Los extremos son $\boxed{(2, 20/3)}$ y $\boxed{(4, 16/3)}$. **Opción B - Ejercicio 2**

Tomamos $t = \sqrt{1+x} - 1$. Entonces $x = t^2 + 2t$, $dx = 2(t+1)dt$ y los extremos $x = 3, 8$ pasan a $t = 1, 2$. La integral queda

$$I = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t} dt = 2[t + \ln t]_1^2 = \boxed{2 + 2 \ln 2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sea $D = |A| = 2$.

- En (a), A es de orden 3, por lo que $|-3A| = (-3)^3 D = \boxed{-54}$. Además, $|A^{-1}| = 1/D = \boxed{1/2}$.
- En (b), se intercambian las columnas primera y tercera y la tercera fila se multiplica por 2. El factor total es -2 , así que el determinante vale $-2D = \boxed{-4}$.
- En (c), la tercera columna se sustituye por $C_1 - C_3$. Por multilinealidad, el término con dos columnas iguales se anula y queda $-D = \boxed{-2}$.

Opción B - Ejercicio 4

El punto dado $Q = (1, 0, -3)$ pertenece a π_2 . La perpendicular a π_2 tiene dirección normal $n_2 = (1, 2, 1)$, así que el punto buscado es $P = Q + tn_2$. La condición $P \in \pi_1$ da

$$(2, 1, -1) \cdot (Q + tn_2) + 5 = 10 + 3t = 0,$$

de donde $t = -10/3$. Por tanto,

$$\boxed{P = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right)}.$$

La reflexión respecto de π_2 tiene a Q como punto medio entre P y P' , así que $P' = 2Q - P$. Luego

$$\boxed{P' = \left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$$