

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ está definida para $x > 0$ y es continua en el intervalo cerrado $[1/e, e]$. Para encontrar sus extremos absolutos en este intervalo, calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$

La derivada se anula en $x = 1$, es negativa si $0 < x < 1$ y positiva si $x > 1$. Por tanto, f decrece hasta 1 y crece después, así que el mínimo absoluto es $f(1) = 1$. Comparamos también los extremos del intervalo:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 \approx 1.72, \quad f(e) = 1 + \frac{1}{e} \approx 1.37.$$

El máximo absoluto es $e - 1$, alcanzado en $x = 1/e$. En conclusión,

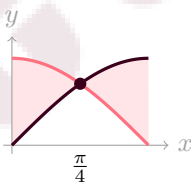
$$\boxed{\min f = 1 \text{ en } x = 1}, \quad \boxed{\max f = e - 1 \text{ en } x = \frac{1}{e}}.$$

En $x = e$, $f(e) = 1 + 1/e$ y $f'(e) = (e - 1)/e^2$. La ecuación punto-pendiente de la tangente es

$$\boxed{y - \left(1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{e^2}(x - e)}.$$

Opción A - Ejercicio 2

En $[0, \pi/2]$, las curvas $y = \sin x$ y $y = \cos x$ se cortan cuando $\tan x = 1$, es decir, en $x = \pi/4$. Además, $\cos x$ queda por encima de $\sin x$ antes del corte y por debajo después. El esbozo muestra los dos recintos:



El área total es la suma de ambas diferencias, porque cambia cuál función está por encima en el punto de corte:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = \boxed{2\sqrt{2} - 2}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

Las dimensiones permiten resolver $AXB = C^t$ multiplicando por A^{-1} a la izquierda y B^{-1} a la derecha. Calculamos primero

$$\det A = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, $B^{-1} = B$, pues $B^2 = I$. Así,

$$X = A^{-1}C^tB^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando el producto,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Como M es el centro del paralelogramo, los vectores desde M a los vértices son

$$\overrightarrow{MA} = A - M = (1, 2, -1), \quad \overrightarrow{MB} = B - M = (-1, -1, 3).$$

El producto vectorial da un vector normal al plano que contiene ambos:

$$\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = (5, -2, 1).$$

Usando el punto $M(1, -1, 0)$, la ecuación general del plano es

$$5x - 2y + z - 7 = 0.$$

El vértice opuesto a B es $D = 2M - B = (2, 0, -3)$. Dos lados contiguos son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -3, 4), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (0, -1, -2).$$

El área del paralelogramo es el módulo de su producto vectorial:

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|(10, -4, 2)\| = \boxed{2\sqrt{30}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Dividiendo el numerador entre el denominador obtenemos

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2 - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)}.$$

Los límites laterales en $x = -1$ son $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha; en $x = 2$ son $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha. Por ello, hay asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 2$. Al tender x a $\pm\infty$, los términos fraccionarios tienden a cero, así que la asíntota horizontal es $y = 2$.

Para el crecimiento, el signo de la derivada determina si la función crece o decrece:

$$f'(x) = \frac{-2x(x+4)}{((x+1)(x-2))^2}.$$

Los valores críticos son $x = -4, 0$ y los puntos excluidos $-1, 2$ dividen también la recta real. Como el denominador es positivo, probamos el signo del numerador en cada intervalo:

Intervalo prueba	$(-\infty, -4)$ -5	$(-4, -1)$ -2	$(-1, 0)$ $-\frac{1}{2}$	$(0, 2)$ 1	$(2, +\infty)$ 3
signo de f'	-	+	+	-	-

Por tanto, f decrece en $(-\infty, -4)$, crece en $(-4, -1)$ y $(-1, 0)$, y decrece en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. En $x = -4$ hay un mínimo relativo, $f(-4) = 16/9$; en $x = 0$ hay un máximo relativo, $f(0) = 0$.

Para hallar dónde la gráfica corta a su asíntota horizontal, resolvemos $f(x) = 2$:

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2 \implies x^2 = x^2 - x - 2 \implies x = -2.$$

La intersección es $\boxed{(-2, 2)}$.

Opción B - Ejercicio 2

Integramos $x^2 \cos x$ por partes dos veces. Primero tomamos $u = x^2$ y $dv = \cos x \, dx$:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.$$

Para la integral restante, por partes con $u = x$ y $dv = \sin x \, dx$:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Así, una primitiva es $F(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$. La condición $F(\pi) = 0$ da $-2\pi + C = 0$, luego

$$F(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + 2\pi.$$

Opción B - Ejercicio 3

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array} \right).$$

Su determinante es $\det A_k = 2(k-1)(k+7)$. Si $k \neq 1, -7$, los rangos de ambas matrices son 3, así que el sistema es compatible determinado.

Para $k = 1$, la tercera fila de coeficientes es $-\frac{1}{2}R_1 - \frac{7}{2}R_2$, y su término independiente cumple la misma combinación. Por ello, $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_1^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Resolviendo las dos ecuaciones independientes y tomando $z = t$,

$$(x, y, z) = (2t + 1, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $k = -7$, la tercera fila de coeficientes es $(R_2 - R_1)/2$, pero la misma combinación de términos independientes vale $(-1 - 3)/2 = -2$, distinto de $k + 1 = -6$. Así, $\text{rg}(A_{-7}) = 2$ y $\text{rg}(A_{-7}^*) = 3$: el sistema es incompatible. Queda discutido para todos los valores de k .

Opción B - Ejercicio 4

Restamos la segunda ecuación de la primera para obtener $z = 4$. Además, $2x - 3y = 4$. Un punto de la recta es $Q = (2, 0, 4)$ y un vector director es $(3, 2, 0)$; por tanto, en forma paramétrica,

$$r : \quad x = 2 + 3t, \quad y = 2t, \quad z = 4, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El eje OX también es una recta: pasa por $P = (0, 0, 0)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Las dos rectas no se cortan, porque todos los puntos de r tienen $z = 4$ y los del eje OX tienen $z = 0$; sus directores tampoco son paralelos. Son, por tanto, rectas cruzadas.

La distancia entre rectas cruzadas se calcula mediante

$$d(OX, r) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}, \quad \vec{v} = (3, 2, 0).$$

Como $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 2)$ y $Q - P = (2, 0, 4)$,

$$d(OX, r) = \frac{|(2, 0, 4) \cdot (0, 0, 2)|}{2} = \boxed{4}.$$