

Problema 1.1. Dadas las matrices cuadradas $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

se pide:

- Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} , incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1} . (1,1 puntos).
- Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. (1,1 puntos).
- Obtener razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación $xI + yA + zA^2 = B$. (1,1 puntos).

Solución:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa.

$$\text{Calculemos } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \neq 0 \text{ luego } \exists A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 12 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 12 & -6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el proceso de cálculo de A^{-1} cada uno de los pasos realizados son los siguientes,

α_{ij}	Formar una matriz con los menores complementarios de cada elemento
A_{ji}	Obtener los adjuntos de cada elemento cambiando el signo alternativamente
A_{ji}	Trasponer la matriz anterior.

b) Calcular $|3A^{-1}|$

Como A^{-1} es una matriz 3×3 , $|3A^{-1}| = 3^3 |A^{-1}| = 27 |A^{-1}| =$

También sabemos que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ luego,

$$= 27 \frac{1}{|A|} = 27 \frac{1}{9} = 3$$

c) Resolver $xI + yA + zA^2 = B$

Calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3+6.0+0.0 & 3.6+6.3+0.0 & 3.0+6.2+0.1 \\ 0.3+3.0+2.0 & 0.6+3.3+2.0 & 0.0+3.2+2.1 \\ 0.3+0.0+1.0 & 0.6+0.3+1.0 & 0.0+0.2+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación que debemos resolver es

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

expresión que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 9z = 18 \\ 6y + 36z = 48 \\ 12z = 12 \\ 0 = 0 \\ x + 3y + 9z = 18 \\ 2y + 8z = 12 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Eliminando las ecuaciones} \\ \text{repetidas y las que no aportan} \\ \text{información (0 = 0),} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 9z = 18 \\ 6y + 36z = 48 \\ 12z = 12 \\ 2y + 8z = 12 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Simplificando} \\ \text{coeficientes} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 9z = 18 \\ y + 6z = 8 \\ z = 1 \\ y + 4z = 6 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de z que nos aporta la 3ª ecuación en las restantes, el sistema quedará:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 9.1 = 18 \\ y + 6.1 = 8 \\ y + 4.1 = 6 \\ x + y + 1 = 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Efectuando las operaciones pendientes,} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ y = 2 \\ y = 2 \\ x + y = 5 \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de y obtenido en la 2ª y 3ª ecuaciones en las restantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3.2 = 9 \\ x + 2 = 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Efectuando las operaciones pendientes,} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación inicial es: $x = 3, y = 2, z = 1$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (\alpha+3)x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - (\alpha+2)z = 2 \\ 2x + (\alpha-3)y - 2z = 4 \end{cases}, \quad \text{se pide, razonando las respuestas:}$$

- a) Justificar que para el valor de $\alpha = 0$ el sistema es incompatible. (1,1 puntos).
 b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (1,1 puntos).
 c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado. (1,1 puntos).

Solución:

Previamente realizamos el estudio del sistema según los valores del parámetro α .

Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la ampliada, tenemos

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -(\alpha+2) & 2 \\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Como la matriz A es 3×3 , el máximo rango de A será 3.

Como la matriz A' es 3×4 , el máximo rango de A' será 3.

Por lo que procedemos a estudiar el rango de A .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \alpha+3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha+2) \\ 2 & \alpha-3 & -2 \end{vmatrix} = 4(\alpha+3) - 2(\alpha-3) + 8(\alpha+2) - 8 + (\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2) - 8 = \\ &= 4\alpha + 12 - 2\alpha + 6 + 8\alpha + 16 - 16 + (\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2) = 10\alpha + 18 + (\alpha^2 - 9)(\alpha+2) = \\ &= 10\alpha + 18 + \alpha^3 - 9\alpha + 2\alpha^2 - 18 = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \alpha(\alpha+1)^2 \end{aligned}$$

Los valores de α que anulan el determinante de A serán,

$$\alpha(\alpha+1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ (\alpha+1)^2 = 0 \rightarrow \alpha+1=0 \rightarrow \alpha=-1 \end{cases}$$

A partir de estos cálculos vamos a contestar a las cuestiones del problema.

- a) Justificar que para $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.

Según el estudio realizado anteriormente, para $\alpha = 0$ sabemos que $|A| = 0$, luego $\text{rang}(A) \leq 2$

Calculemos el rango de A ,

$$\text{para } \alpha = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

busquemos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0, \quad \text{por lo tanto } \text{rang}(A) = 2$$

Calculemos el rango de A'

$$\text{para } \alpha = 0 \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a partir del menor de orden 2 no nulo de A veamos si conseguimos un menor de orden 3 no nulo de A' ,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = C_2 + C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-4) = -2 \neq 0, \quad \text{por lo tanto } \text{rang}(A') = 3$$

Como $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A')$, para $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.

b) Valores de α para que el sistema sea compatible y determinado.

Por ser un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas será compatible y determinado cuando $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$.

Según estudiamos al principio $|A| = 0$ para $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$, por lo que para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ $\text{rang}(A) = 3$.

Como el máximo rango de A' también es 3, para estos valores de α $\text{rang}(A') = 3$

Luego, el sistema será compatible y determinado para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.

Del estudio realizado al principio sólo nos queda por estudiar el caso en que $\alpha = -1$

Según ese estudio, para $\alpha = -1$ sabemos que $|A| = 0$, luego $\text{rang}(A) \leq 2$

Calculemos el rango de A ,

para $\alpha = -1$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ En esta matriz se comprueba, fácilmente, que $F_1 = F_3$ y $F_1 = 2 \times F_2$.
Es decir, sólo tiene una fila linealmente independiente, por lo que su rango es 1.

Calculemos el rango de A'

para $\alpha = -1$ $A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ En esta matriz se cumplen las mismas relaciones que en la matriz A .
Por lo tanto su rango es 1.

Hemos obtenido: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1 < n^\circ$ de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado

Resolvemos el sistema usando sólo una incógnita (por ser de rango 1), por ejemplo, escogemos la ecuación correspondiente a la 2ª fila y como incógnita principal la x ,

$$x - 2y - z = 2$$

despejamos x , $x = 2 + 2y + z$

Y finalmente, para $\alpha = -1$ la solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Problema 2.1. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y - 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:

- El área del triángulo ABC. (1,1 puntos).
- El perímetro del triángulo ABC. (1,1 puntos).
- Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. (1,1 puntos).

Solución:

Calculemos los puntos A, B y C.

A – punto de corte entre el plano y el eje OX

La ecuación del eje OX la podemos dar como intersección de dos planos:
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema a resolver para encontrar el punto A es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación obtenemos $x - 4 = 0$, luego $x = 4$. El punto A tiene de coordenadas (4, 0, 0)

Similarmente obtenemos los restantes puntos.

B – punto de corte entre el plano y el eje OY

El sistema a resolver para encontrar el punto B es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, z en la primera ecuación obtenemos $4y - 4 = 0$, luego $y = 1$. El punto B tiene de coordenadas (0, 1, 0)

C – punto de corte entre el plano y el eje OZ

El sistema a resolver para encontrar el punto C es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y en la primera ecuación obtenemos $-2z - 4 = 0$, luego $z = -2$. El punto C tiene de coordenadas (0, 0, -2)

a) Área del triángulo ABC.

Para calcular esta área utilizamos la siguiente fórmula
$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AB} = (0, 1, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 1, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, 0, -2) - (4, 0, 0) = (-4, 0, -2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} = (-2, -8, 4)$$

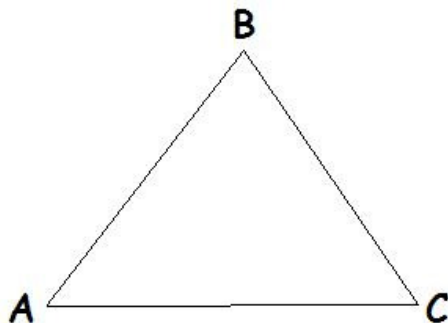
$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = |(-2, -8, 4)| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\text{Finalmente } S = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} = \sqrt{21} \text{ u}^2$$

b) Perímetro del triángulo ABC.

$$\begin{aligned}
 P &= d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) = \\
 &= \sqrt{(0-4)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} + \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (-2-0)^2} + \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0+2)^2} = \\
 &= \sqrt{16+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{16+4} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'83 \text{ u}
 \end{aligned}$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC



Obtengamos los vectores que determinan los tres lados. Anteriormente ya obtuvimos dos de ellos,

$$\vec{AB} = (-4, 1, 0)$$

$$\vec{AC} = (-4, 0, -2)$$

Calculemos el tercero

$$\vec{BC} = (0, 0, -2) - (0, 1, 0) = (0, -1, -2)$$

Procedamos al cálculo de los tres ángulos, para ello utilizamos la fórmula del coseno del ángulo determinado por dos vectores.

$$\begin{aligned}
 \cos \hat{A} &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{(-4, 1, 0) \cdot (-4, 0, -2)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{17} \sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{17} 2 \sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}} \rightarrow \\
 \rightarrow \hat{A} &= \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) = 29'805^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \hat{B} &= \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{(4, -1, 0) \cdot (0, -1, -2)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17} \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \rightarrow \\
 \rightarrow \hat{B} &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) = 83'773^\circ
 \end{aligned}$$

$$\text{y finalmente } \hat{C} = 180^\circ - 29'805^\circ - 83'773^\circ = 66'422^\circ$$

Problema 2.2. Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (4,4,0)$ y $P = (0,0,12)$, se pide obtener razonadamente:

- a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación $z = 0$. (1 punto).
 b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:
- Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación $x = y = 4$
 - Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q . (2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución).

Solución:

a) Recta que pasa por $A(4, 4, 0)$ y $\perp$ al plano $z = 0$.

Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector normal del plano será director de la recta.

Del plano $z = 0$ un vector normal es $(0, 0, 1)$, por lo tanto de la recta pedida conocemos:

punto $A(4, 4, 0)$ y vector director $\vec{v}(0, 0, 1)$, la ecuación de la recta será, ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 + 0\lambda \\ y = 4 + 0\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ecuación continua:

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-0}{1}$$

b) Q es un punto de la recta r de ecuación $x = y = 4$, luego las coordenadas de Q serán $(4, 4, \lambda)$, siendo λ un número real.

$$\text{Plano, } \pi, \text{ que } \begin{cases} \text{pasa por los puntos } P(0,0,12) \text{ y } Q(4,4,\lambda) \\ y \\ \perp \text{ recta } s \text{ que pasa por } \begin{matrix} O(0,0,0) \\ Q(4,4,\lambda) \end{matrix} \rightarrow \vec{v}_s(4,4,\lambda) \end{cases}$$

$$\pi \perp s \rightarrow \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda)$$

$$\text{como } P \text{ y } Q \in \pi \rightarrow \vec{PQ} \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$$\vec{PQ} = (4,4,\lambda-12)$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda-12) \cdot (4,4,\lambda) = 16 + 16 + \lambda^2 - 12\lambda = \lambda^2 - 12\lambda + 32$$

$$\text{luego } \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{12+4}{2} = 8 \\ \frac{12-4}{2} = 4 \end{cases}$$

Para $\lambda = 8$

$$\vec{n}_\pi = (4,4,8) \approx (1,1,2) \rightarrow \pi: x + y + 2z + D = 0$$

$$P(0,0,12) \in \pi \rightarrow 0 + 0 + 2 \cdot 12 + D = 0 \rightarrow 24 + D = 0 \rightarrow D = -24$$

$$\text{luego } \pi: x + y + 2z - 24 = 0$$

Para $\lambda = 4$

$$\vec{n}_{\pi} = (4, 4, 4) \approx (1, 1, 1) \rightarrow \pi: x + y + z + D = 0$$

$$P(0, 0, 12) \in \pi \rightarrow 0 + 0 + 12 + D = 0 \rightarrow 12 + D = 0 \rightarrow D = -12$$

$$\text{luego } \pi: x + y + z - 12 = 0$$

Por lo tanto el plano buscado puede ser: $x + y + 2z - 24 = 0$ o $x + y + z - 12 = 0$

Tu Profe al Rescate

Problema 3.1.

- a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)} \quad . (1 \text{ punto}).$$

- b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que
- $\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$
- . (1 punto).

- c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva
- $y = \frac{1}{(3-x)(3+x)}$
- , el eje OX y las rectas de ecuaciones
- $x = -2$
- y
- $x = 2$
- . (1,3 puntos).

Solución:

- a) Dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

*Dom f(x)**Como f(x) es una función racional busquemos las raíces del denominador,*

$$(3-x)(3+x) = 0 \begin{cases} 3-x=0 & \rightarrow x=3 \\ 3+x=0 & \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Luego } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

*Intervalos de crecimiento y decrecimiento**Debemos estudiar el signo de f'(x).*

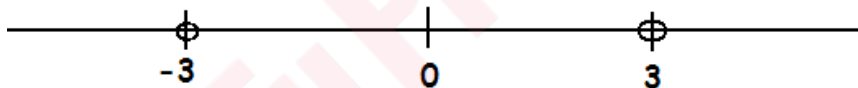
$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{9-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{2x}{(9-x^2)^2}$$

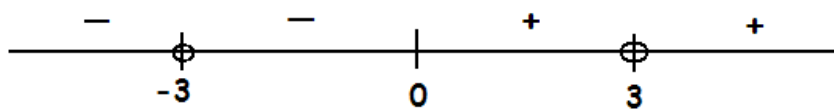
Buscamos las raíces del numerador y denominador,

$$2x = 0; x = 0$$

$$(9-x^2)^2 = 0; 9-x^2 = 0; x^2 = 9; x = \pm 3$$

Marcamos en la recta real las raíces obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta en dominio de la función,*Como el denominador de f'(x) está elevado al cuadrado será positivo, por lo que el signo de f'(x) sólo depende del numerador que es 2x*

$$2x > 0; x > 0$$

Y el signo de f'(x) será*f(x) es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$*

- b) Efectuando la suma que queda indicada,

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x) + B(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

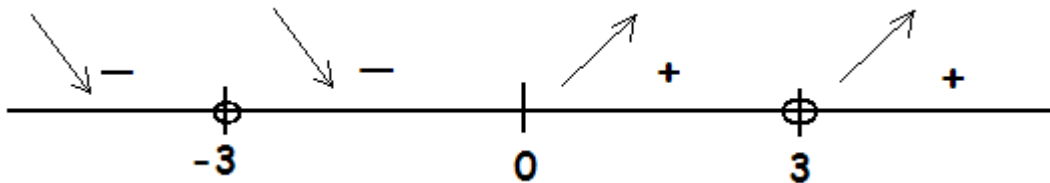
Luego debe ser $1 = A(3+x) + B(3-x)$, buscamos los valores de A y B dándole valores a x para $x = 3$ $1 = A(3+3) + B(3-3)$

$$1 = 6A$$

$$A = \frac{1}{6}$$

para $x = -3$ $I = A(3-3) + B(3-(-3))$
 $I = 6B$
 $B = \frac{1}{6}$

- c) Para calcular esta área debemos dibujar, de forma aproximada, la curva dada
 La curva corresponde a la función estudiada en el apartado a). Por lo tanto conocemos:
 su dominio, $Dom = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
 y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:



De lo anterior deducimos que en $x = 0$ la curva tiene un mínimo relativo

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{(3-0)(3+0)} = \frac{1}{9} \rightarrow \text{mínimo relativo} \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX

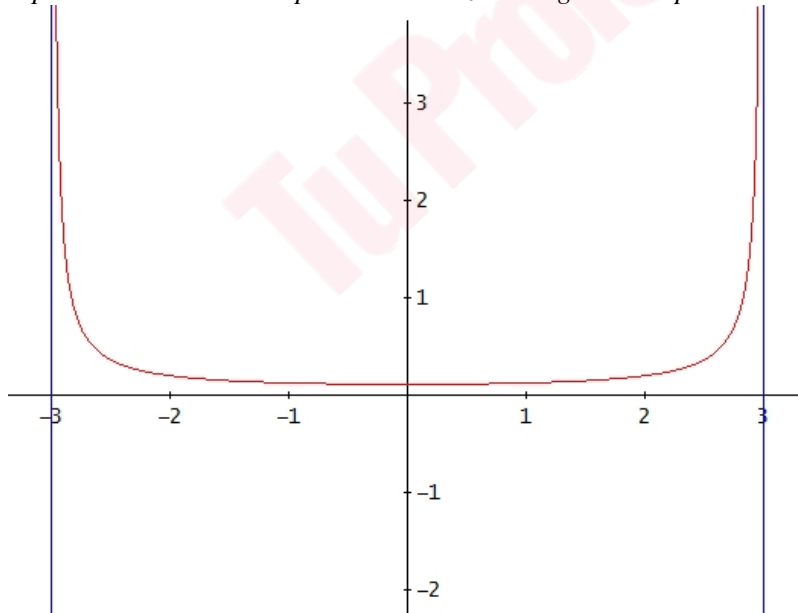
$$y = 0, \quad \frac{1}{(3-x)(3+x)} = 0 \rightarrow 1 = 0 \quad \text{no tiene solución}$$

Posibles asíntotas verticales $x = -3$ y $x = 3$; veámoslo,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6 \cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{luego } x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

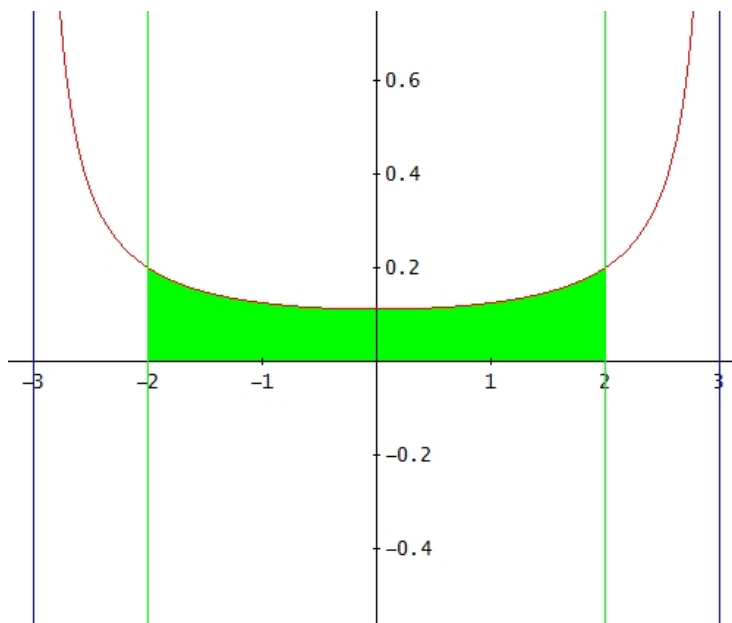
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{0 \cdot 6} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{luego } x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

A partir de lo estudiado podemos realizar la siguiente representación,



No es necesario realizar más cálculos sobre la representación de la curva puesto que el área buscada está limitada por las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$ y hemos representado la curva entre -3 y 3

Gráficamente, el área que debemos calcular es,



El cálculo de esta área lo realizamos mediante la siguiente integral

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx =$$

por el apartado b) sabemos que,

$$\int_{-2}^2 \left[\frac{1/6}{(3-x)} + \frac{1/6}{(3+x)} \right] dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|3+x| \right]_{-2}^2 =$$

$$= \frac{-1}{6} \ln|3-2| + \frac{1}{6} \ln|3+2| - \left[\frac{-1}{6} \ln|3+2| + \frac{1}{6} \ln|3-2| \right] = \frac{-1}{6} \ln 1 + \frac{1}{6} \ln 5 + \frac{1}{6} \ln 5 - \frac{1}{6} \ln 1 =$$

$$= (\text{como } \ln 1 = 0) = \frac{2}{6} \ln 5 = \frac{1}{3} \ln 5$$

Finalmente, el área de la superficie pedida es $\frac{1}{3} \ln 5 u^2 \approx 0.5365 u^2$

Tu Profeta al Rescate

Problema 3.2. Dada la función real $f(x) = e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función $f(x) + f(-x)$. (1,1 puntos).

b) La integral $\int_{-a}^a f(x) dx$, donde a es un número real positivo. (1,1 puntos).

c) El punto de inflexión de $f(x)$. (1,1 puntos).

Solución:

a)

$$f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-(-x)} = \underline{e^x} - \underline{e^{-x}} + \underline{e^{-x}} - \underline{e^x} = 0$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_{-a}^a = e^a + e^{-a} - (e^{-a} + e^{-(-a)}) = \\ &= e^a + e^{-a} - e^{-a} - e^a = 0 \end{aligned}$$

c) Punto de inflexión de $f(x)$

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow \\ &\rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x e^x = 1 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Estudiemos el signo de $f''(x)$ a la izquierda y derecha de $x = 0$

x	$f''(x)$
-1	$e^{-1} - e^1 = \frac{1}{e} - e = -2,350 < 0$
1	$e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = 2,350 > 0$

Por lo tanto como $f''(x)$ cambia de signo en $x = 0$, en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

$$x = 0, f(0) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Luego el punto de inflexión de $f(x)$ es $(0, 0)$.

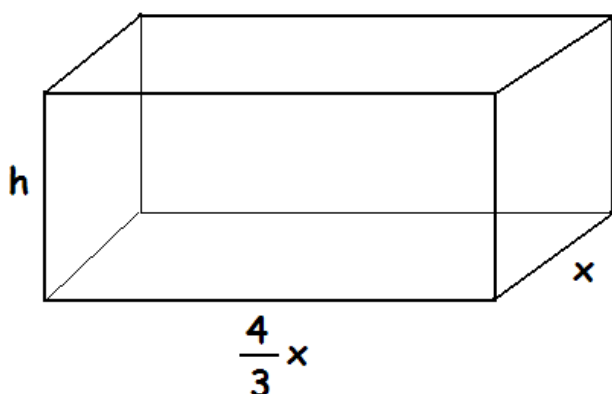
Problema 4.1. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea $\frac{3}{4}$ de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2 , 300 €/m^2 y 256 €/m^2 . Determinar razonadamente:

- El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. (2,3 puntos).
- Dicho coste mínimo. (1 punto).

Solución:

a) Calcular el valor x de la anchura que minimiza el coste..

La bodega a construir es, según el enunciado,



Sabemos que

El precio del suelo es de 225 €/m^2

El precio del techo es de 300 €/m^2

El precio de la pared lateral es de 256 €/m^2

El coste de la bodega, C , será

$$C = 225 \frac{4}{3} x x + 300 \frac{4}{3} x x + 2 \cdot 256 x h + 2 \cdot 256 \frac{4}{3} x h = 300x^2 + 400x^2 + 512 x h + \frac{2048}{3} x h =$$

$$= 700x^2 + \frac{3584}{3} x h$$

Para poder encontrar el mínimo de C debemos tener una sola variable. Busquemos la relación entre x y h . Esta relación nos la da el volumen de la bodega, 100 m^3 .

$$V = x \frac{4}{3} x h = 100 \rightarrow x^2 h = \frac{300}{4} \rightarrow x^2 h = 75 \rightarrow h = \frac{75}{x^2}$$

$$\text{Luego } C = 700x^2 + \frac{3584}{3} x \frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

Por ser x y h longitudes, y teniendo en cuenta la relación entre ellas $x^2 h = 75$, los valores que puede tomar la variable x son todos los reales positivos, es decir que $\text{Dom } C = (0, +\infty)$.

Busquemos el mínimo de C ,

$$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$$

$$1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \rightarrow 1400x^3 - 89600 = 0 \rightarrow 1400x^3 = 89600 \rightarrow x^3 = \frac{89600}{1400} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Estudiamos el signo de C' a la izquierda y derecha de 4 para determinar si es un mínimo,

x	C'
1	$1400 \cdot 1 - \frac{89600}{1^2} = -88200 < 0$
5	$1400 \cdot 5 - \frac{89600}{5^2} = 3416 > 0$

Luego en $x = 4$ hay un mínimo relativo y, además, como en $(0, 4)$ la función C es decreciente y en $(4, +\infty)$ es creciente el mínimo es absoluto.

El valor de x que minimiza el coste es 4, es decir, hay que construir una bodega cuya base tenga una anchura de 4 m.

b) El coste mínimo.

$$C(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89600}{4} = 33600$$

El coste mínimo de la bodega es de 33600€

Tu Profe al Rescate

Problema 4.2. Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros e un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo. (2 puntos por obtener el número de unidades y 1,3 puntos por el precio de venta).

Solución:

Precio de compra: 300€/unidad

Precio de venta: $300 + 40\% \cdot 300 = 420$ €/unidad

A 20 €/unidad vende 50 unidades/mes

Por cada 3€ de rebaja incrementa las ventas en 5 unidades. Llamando $x = n^\circ$ de veces que aplica la rebaja de 3€, x es un número natural.

Entonces, del enunciado del ejercicio deducimos, a $(420 - 3x)$ €/unidad vende $(50 + 5x)$ unidades/mes.

Quiere maximizar los beneficios, B .

$B = \text{beneficio_unitario} \times \text{unidades_vendidas}$

siendo $\text{beneficio_unitario} = \text{precio_venta} - \text{precio_compra}$, luego

$$B = [(420 - 3x) - 300] (50 + 5x) = (120 - 3x) (50 + 5x) = 6000 + 600x - 150x - 15x^2 = -15x^2 + 450x + 6000$$

Veamos el dominio de esta función, B . Las expresiones iniciales en que intervienen x son $\text{precio_venta} = 420 - 3x$ y $\text{unidades_a_vender} = 50 + 5x$

Evidentemente, para obtener beneficios, el precio de venta debe ser superior al precio de compra. Por lo tanto,

$$420 - 3x > 300; \quad 420 - 300 > 3x; \quad 120 > 3x; \quad 40 > x; \quad x < 40$$

El apartado de número de unidades a vender, $50 + 5x$, no aporta ninguna restricción.

Luego el dominio de la función B son los números naturales menores que 40, es decir, $\text{Dom } B = \{0, 1, \dots, 39\}$

Busquemos el máximo de B .

$$B' = -30x + 450$$

$$-30x + 450 = 0$$

$$-30x = -450$$

$$x = (-450)/(-30) = 15$$

Estudiemos el signo B' a la izquierda y derecha de 15, teniendo en cuenta el dominio de B

x	B'
10	$-30 \cdot 10 + 450 = -300 + 450 = 150 > 0$
20	$-30 \cdot 20 + 450 = -600 + 450 = -150 < 0$

A la izquierda de 15 B es creciente y a la derecha decreciente, en $x = 15$ hay un mínimo relativo y como el dominio de B es $\{0, 1, \dots, 39\}$, el mínimo es absoluto.

Finalmente, las respuestas a las cuestiones planteadas son:

Número de unidades que debe pedir,

$$50 + 5 \cdot 15 = 125, \quad \text{debe pedir 125 unidades.}$$

Precio de venta de cada unidad,

$$420 - 3 \cdot 15 = 355, \quad \text{debe vender cada unidad a 375€.}$$