

CATALUÑA · PAU 2010 · ORDINARIA

Matemáticas II

18 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se pueden utilizar calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Encuentre la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que contiene la recta $r_1 : \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$ y es paralelo a la recta $r_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Dados el plano $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$ y los puntos $P = (3, 1, -2)$ y $Q = (0, 1, 2)$:

a) 1 punto

Calcule la ecuación continua de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P .

b) 1 punto

Calcule la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano perpendicular a π que pasa por los puntos P y Q .

Ejercicio 1

OPCIÓN C 2 puntos

Considere un sistema cualquiera de dos ecuaciones con tres incógnitas. Responda razonadamente a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

¿Es posible que el sistema considerado sea compatible determinado?

b) 1 punto

¿Puede ser incompatible?

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + pz = 5 \end{cases}$:

a) 1,5 puntos

Estudie su carácter (es decir, si es compatible o no y si es determinado o no) en función del parámetro p .

b) 0,5 puntos

Compruebe que si $p \neq 5$ la solución del sistema no depende del valor de este parámetro.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la igualdad matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

a) 1 punto

Compruebe si las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen o no la igualdad anterior.

b) 1 punto

En general, dadas dos matrices cualesquiera A y B cuadradas del mismo orden, explique razonadamente si hay alguna condición que deban cumplir para que la igualdad del enunciado sea cierta.

Ejercicio 2

OPCIÓN C 2 puntos

Dados el punto $P = (1, 0, -2)$ y la recta $r : \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-3}$:

a) 1,5 puntos

Encuentre la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente la recta r .

b) 0,5 puntos

Calcule la distancia del punto P a la recta r .

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Un segmento de longitud fijada m se apoya sobre los ejes de coordenadas. Calcule el valor del ángulo α que forma el segmento con el eje OX para que el triángulo rectángulo determinado por el segmento con los ejes y del cual m es la hipotenusa tenga área máxima. Compruebe que se trata realmente de un máximo.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cualquiera de segundo grado.

a) 1 punto

Encuentre la relación existente entre los parámetros a , b y c sabiendo que se cumple que $P(1) = 0$ y $P(2) = 0$.

b) 1 punto

Cuando se cumple la condición anterior, indique qué valores puede tener $P'(3/2)$.

Ejercicio 3

OPCIÓN C 2 puntos

Determine el valor de los parámetros a , b y c para que la gráfica de la función $f(x) = \frac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente:

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Dadas las rectas $r_1 : \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ y $r_2 : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$.

a) 1 punto

Compruebe que son paralelas.

b) 1 punto

Encuentre la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que las contiene.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Hemos escalonado la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, $A \cdot X = b$, y hemos obtenido:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) 1,5 puntos

Discuta este sistema en función del parámetro a .

b) 0,5 puntos

Resuélvalo cuando $a = 2$.

Ejercicio 4

OPCIÓN C 2 puntos

Sean A , B y C matrices cuadradas de orden n .

a) 1 punto

Explique razonadamente si es posible que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ y $\det(A \cdot B) = 0$. Si es posible, ponga un ejemplo.

b) 1 punto

Si sabemos que $\det A \neq 0$ y que $A \cdot B = A \cdot C$, explique razonadamente si podemos asegurar que $B = C$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

La gráfica de la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$ es la siguiente:

a) 1,5 puntos

Encuentre una primitiva.

b) 0,5 puntos

Aplicando el resultado del apartado anterior, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

En la figura siguiente se representan dos funciones. Una es la derivada de la otra. Decida si la función $f(x)$ es la derivada de la función $g(x)$ o es al revés, estudiando qué pasa en los puntos $x = a$, $x = b$ y $x = c$.

Ejercicio 5

OPCIÓN C 2 puntos

Sean r y s dos rectas de ecuaciones $r : (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1)$ y $s : x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}$.

a) 1,5 puntos

Encuentre el valor del parámetro a para que estas rectas se corten.

b) 0,5 puntos

En el caso en que se corten, encuentre la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que las contiene.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Sea $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Encuentre los valores de las variables x e y para que se cumpla que $A^2 = A$.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sean $u_1 = (-1, 3, 2)$, $u_2 = (2, -1, 4)$ y $u_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$ tres vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) 1 punto

Encuentre el valor del parámetro a para el cual el vector u_3 es combinación lineal de los vectores u_1 y u_2 .

b) 1 punto

Compruebe que para $a = 0$ el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 6

OPCIÓN C 2 puntos

En la figura se muestra la curva $y = x(4 - x)$ y una recta r que pasa por el origen y corta la curva en un punto P de abscisa k , con $0 < k < 4$.

a) 1 punto

Encuentre el área sombreada, delimitada por la curva y la recta, en función de k .

b) 1 punto

Encuentre para qué valor de k el área de la región sombreada es la mitad del área del recinto limitado por la curva y el eje OX .