

Modelo 5 de 2005

Polinomios, funciones racionales, sistemas y geometría.

Opción A - Ejercicio 1

La gráfica corta al eje x en $x = -2$ y es tangente al eje en $x = 1$, así que $x = 1$ es una raíz doble. El coeficiente principal es 1; por ello

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 = x^3 - 3x + 2.$$

La región sombreada va desde $x = -2$ hasta $x = 1$ y está sobre el eje. Su área es

$$S = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

El dominio excluye $x = 2$. Dividiendo,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = x - 2 - \frac{1}{x - 2}.$$

Por tanto, $x = 2$ es asíntota vertical y $y = x - 2$ es asíntota oblicua. No hay horizontal. Además,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0,$$

así que f crece en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$. En $[0, 2)$ es creciente, $f(0) = -3/2$ y $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 2^-$. Tiene mínimo absoluto $\boxed{f(0) = -3/2}$ y no tiene máximo absoluto en ese intervalo. **Opción A - Ejercicio 3**

Sean A, M, G las cantidades de dinero de Álvaro, Marta y Guillermo. Tras la entrega, los tres tienen lo mismo, por lo que

$$\frac{4}{5}A = M + \frac{1}{5}A = G = T.$$

De aquí $A = 5T/4$, $M = 3T/4$ y $G = T$. Como inicialmente suman 84 euros,

$$\frac{5}{4}T + \frac{3}{4}T + T = 3T = 84 \Rightarrow T = 28.$$

Así, Álvaro tiene $\boxed{35 \text{ €}}$, Marta $\boxed{21 \text{ €}}$ y Guillermo $\boxed{28 \text{ €}}$. **Opción A - Ejercicio 4**

Parametrizamos la recta indicada:

$$r : (x, y, z) = (-3, 0, 3) + t(1, 1, 2).$$

(a) Sean $Q = (-3, 0, 3) \in r$ y $A = (0, -3, 1)$. Los vectores que generan el plano son $d = (1, 1, 2)$ y $A - Q = (3, -3, -2)$. Un normal es su producto vectorial $(4, 8, -6)$, proporcional a $(2, 4, -3)$. Al usar el punto Q ,

$$\boxed{2x + 4y - 3z + 15 = 0}.$$

(b) Un punto de r es $R(t) = (-3 + t, t, 3 + 2t)$. Para que la recta desde A a $R(t)$ sea paralela a π , el vector $R(t) - A$ debe ser perpendicular al normal $n = (2, -2, 3)$:

$$(R(t) - A) \cdot n = (t - 3, t + 3, 2t + 2) \cdot (2, -2, 3) = 6t - 6 = 0.$$

Así, $t = 1$, $R = (-2, 1, 5)$ y una dirección de la recta pedida es $R - A = (-2, 4, 4)$, proporcional a $(-1, 2, 2)$. En forma paramétrica:

$$\boxed{(x, y, z) = (0, -3, 1) + s(-1, 2, 2), \quad s \in \mathbb{R}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Como la tangente en $x = 1$ es horizontal y vale $y = -2$, se cumplen $f(1) = -2$ y $f'(1) = 0$. Para $f(x) = ax + b/x$,

$$a + b = -2, \quad a - b = 0,$$

por lo que $a = b = -1$. Así, $f(x) = -x - 1/x$ para $x > 0$. Su derivada

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}$$

es positiva en $(0, 1)$ y negativa en $(1, +\infty)$. La función crece y luego decrece; alcanza un máximo absoluto en $(1, -2)$. **Opción B - Ejercicio 2**

Integramos por partes dos veces. Primero, con $u = x^2$ y $dv = \sin(2x)dx$:

$$\int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \int x \cos(2x) dx.$$

Aplicando de nuevo integración por partes al último término,

$$\int x \cos(2x) dx = \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x).$$

La primitiva general es $-x^2 \cos(2x)/2 + x \sin(2x)/2 + \cos(2x)/4 + C$. Al imponer $F(0) = 1$, se obtiene $C = 3/4$. Por tanto,

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{3}{4}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \det A = (m-1)^2(m+2).$$

Si $m \notin \{1, -2\}$, el determinante no es cero y el sistema es SCD. Para $m = 1$, las filas de A coinciden, así que $\text{rg } A = 1$, mientras que los términos independientes no coinciden y $\text{rg } A^* = 2$; es SI. Para $m = -2$, un menor de A formado por las dos primeras filas y columnas 1,2 vale $-3 \neq 0$ y $\det A = 0$, luego $\text{rg } A = 2$. El sistema es compatible y su solución general es

$$(x, y, z) = \left(t + \frac{4}{3}, t + \frac{2}{3}, t \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que $\text{rg } A^* = 2$ y es SCI. En (a), el valor que da al menos dos soluciones es $m = -2$. Para que haya una solución con $x = 1$, la tercera ecuación da $y = -z$. Sustituyéndolo en la primera, $(1-m)z = -1$, que es posible exactamente cuando $m \neq 1$. Por tanto, los valores son $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **Opción B - Ejercicio 4**

La recta r tiene punto $(1, -1, b)$ y dirección $d_r = (1, -1, 1)$. Parametrizamos la otra recta resolviendo sus dos planos: un punto es $S = (0, -2, 1)$ y su dirección, producto vectorial de los normales $(1, -1, 1)$ y $(6, 0, 2)$, puede tomarse $d_s = (1, -2, -3)$. Las rectas son coplanarias si $(S - R) \cdot (d_r \times d_s) = 0$. Como

$$d_r \times d_s = (5, 4, -1), \quad S - R = (-1, -1, 1 - b),$$

la condición es $b - 10 = 0$, así que $b = 10$. El normal $(5, 4, -1)$ y el punto $(1, -1, 10)$ dan el plano

$$5x + 4y - z + 9 = 0.$$