

Junio de 2015 · Convocatoria ordinaria

Se desarrollan las dos opciones completas. En el examen basta con resolver una de ellas.

Opción A

A.1. Matrices

Se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular A^{-1} .

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante no es cero. Para una matriz de orden 2,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Sustituimos los elementos de A :

$$\det A = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 0.$$

Por tanto, A es invertible. La fórmula de la inversa es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aplicándola a A :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Conclusión: } A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Hallar X e Y sabiendo que $XA = B$ y $AY = B$.

En $XA = B$, la matriz A está a la derecha de X . Multiplicamos ambos miembros por A^{-1} a la derecha y respetamos el orden de los factores:

$$XA = B \implies XAA^{-1} = BA^{-1} \implies X = BA^{-1}.$$

Calculamos el producto entrada a entrada:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En $AY = B$, multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$AY = B \implies A^{-1}AY = A^{-1}B \implies Y = A^{-1}B.$$

Ahora efectuamos este producto por separado:

$$Y = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Justificar que si $M^2 = I$, entonces $M^3 = M^7$.

Usamos la hipótesis $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad. Primero,

$$M^3 = M^2 M = IM = M.$$

Para la séptima potencia agrupamos seis factores en tres parejas, sin cambiar su orden:

$$M^7 = (M^2)^3 M = I^3 M = IM = M.$$

Ambas potencias son iguales a M . En consecuencia,

$$M^3 = M^7.$$

A.2. Recta, plano y distancia

La recta r viene dada como intersección de los planos $x + 2y = 0$ y $z = 0$, y el punto es $P = (2, 0, 1)$.

Parametrizamos la recta. Tomamos $y = t$; entonces $x = -2t$ y $z = 0$:

$$r : \begin{cases} x = -2t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un vector director es $\vec{d}_r = (-2, 1, 0)$, y el punto $O = (0, 0, 0)$ pertenece a r .

a) Ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

Si un plano es perpendicular a una recta, un vector director de la recta sirve como vector normal del plano. Por tanto, podemos usar $\vec{n}_\pi = (-2, 1, 0)$. La ecuación general del plano por $P = (2, 0, 1)$ es

$$-2(x - 2) + 1(y - 0) + 0(z - 1) = 0.$$

Desarrollamos:

$$-2x + 4 + y = 0.$$

Conclusión: el plano pedido es $\pi : -2x + y + 4 = 0$.

b) Hallar $Q = r \cap \pi$.

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en el plano:

$$-2(-2t) + t + 4 = 0 \implies 5t + 4 = 0 \implies t = -\frac{4}{5}.$$

Sustituyendo este valor en las tres ecuaciones de la recta:

$$x = -2 \left(-\frac{4}{5} \right) = \frac{8}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}, \quad z = 0.$$

Conclusión: el punto de intersección es $Q = (8/5, -4/5, 0)$.

c) Distancia de P a r y justificación de que es la menor distancia a la recta.

El punto Q está en r . Comprobamos que el segmento PQ es perpendicular a la recta. El vector que va de P a Q es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{8}{5} - 2, -\frac{4}{5} - 0, 0 - 1 \right) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -1 \right).$$

Calculamos su producto escalar con el vector director de r :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_r = \left(-\frac{2}{5}\right)(-2) + \left(-\frac{4}{5}\right)(1) + (-1)(0) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0.$$

Luego $PQ \perp r$, así que Q es el pie de la perpendicular y $d(P, r) = |PQ|$. Usamos la fórmula de distancia en el espacio:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}. \end{aligned}$$

Para justificar la comparación con cualquier otro punto, sea R un punto cualquiera de r . Como QR está sobre la recta r y $PQ \perp r$, el triángulo PQR es rectángulo en Q . Por Pitágoras,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \geq PQ^2 \implies PR \geq PQ = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

La igualdad solo ocurre cuando $R = Q$. Así queda justificado que la distancia de P a r es la menor distancia desde P a cualquier punto de la recta.

A.3. Crecimiento, decrecimiento y áreas

La función es

$$f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3.$$

Su dominio es $\mathbb{R}$, porque es una función polinómica: no hay denominadores, raíces pares ni logaritmos que restrinjan los valores de x .

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivamos usando la regla de la potencia:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Los puntos críticos se obtienen resolviendo $f'(x) = 0$:

$$2x - 4 = 0 \implies x = 2.$$

Probamos un valor a cada lado de 2 y estudiamos únicamente el signo de la derivada:

Intervalo	Valor de prueba	Sustitución en $f'(x)$	Signo	Comportamiento de f
$(-\infty, 2)$	0	$f'(0) = -4$	-	Decreciente
$(2, +\infty)$	3	$f'(3) = 2$	+	Creciente

El signo cambia de negativo a positivo en $x = 2$, por lo que allí hay un mínimo. Su valor es

$$f(2) = (2-1)(2-3) = -1.$$

Conclusión: f decrece en $(-\infty, 2)$, alcanza un mínimo en $(2, -1)$ y crece en $(2, +\infty)$.

Comprobamos las asíntotas. No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Tampoco hay horizontal, ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Para una posible asíntota oblicua, la pendiente tendría que ser un límite finito $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$. Aquí

$$\frac{f(x)}{x} = x - 4 + \frac{3}{x},$$

y este cociente no tiene límite finito cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, f no tiene asíntotas verticales, horizontales ni oblicuas.

b) Área encerrada entre $y = f(x)$ e $y = -f(x)$.

Primero hallamos los puntos de corte. Igualamos las dos expresiones y resolvemos:

$$f(x) = -f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies (x-1)(x-3) = 0.$$

Así, se cortan en $x = 1$ y $x = 3$. En el intervalo $(1, 3)$, por ejemplo en $x = 2$, $f(2) = -1 < 0$; luego la curva superior es $y = -f(x)$. El área entre dos curvas es la integral de «superior menos inferior»:

$$\mathcal{A} = \int_1^3 ((-f(x)) - f(x)) dx = -2 \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx.$$

Integramos término a término:

$$\int (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x.$$

Evaluamos en el intervalo de estudio:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -2 \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= -2 \left[\left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) \right] \\ &= -2 \left[0 - \frac{4}{3} \right] = \boxed{\frac{8}{3}}.\end{aligned}$$

c) Valor positivo de a para que el área indicada sea $4/3$.

El segmento que une $(0, 0)$ con $(1, 0)$ es parte del eje de abscisas, y el eje Y fija el extremo $x = 0$. Por tanto, el recinto se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$. En ese intervalo $x - 1 \leq 0$ y $x - 3 < 0$, de modo que $(x - 1)(x - 3) \geq 0$. Como $a > 0$, la curva está por encima del eje de abscisas y el área se calcula integrando la función:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 a(x - 1)(x - 3) dx = a \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx.$$

Desarrollamos la integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= a \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 \\ &= a \left[\left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 \right) \right] = \frac{4a}{3}.\end{aligned}$$

Imponemos el área pedida:

$$\frac{4a}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a = 1}.$$

Opción B

B.1. Discusión de un sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} (1 - \alpha)x + (2\alpha + 1)y + (2\alpha + 2)z = \alpha, \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha + 2, \\ 2x + (\alpha + 1)y + (\alpha - 1)z = \alpha^2 - 2\alpha + 9. \end{cases}$$

Llamamos $A(\alpha)$ a la matriz de coeficientes y $A^*(\alpha)$ a la matriz ampliada:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 2\alpha + 1 & 2\alpha + 2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Usaremos el teorema de Rouché-Frobenius: el sistema es compatible si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$; si ese rango común es 3, hay una única solución (SCD), y si es menor que 3, hay infinitas soluciones (SCI).

Determinante de la matriz de coeficientes. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned}\det A(\alpha) &= (1 - \alpha) \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} - (2\alpha + 1) \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 2 & \alpha - 1 \end{vmatrix} + (2\alpha + 2) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha + 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \alpha)\alpha(\alpha - 1) - (2\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1) + (2\alpha + 2)(\alpha(\alpha + 1) - 2\alpha) \\ &= \alpha(\alpha - 1)(-(\alpha - 1) - (2\alpha + 1) + 2(\alpha + 1)) \\ &= -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2).\end{aligned}$$

El determinante se anula cuando $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$. Para cualquier otro valor, $\text{rg}(A) = 3$. Como la ampliada solo añade una columna y tiene tres filas, también $\text{rg}(A^*) = 3$: esos valores dan sistema compatible determinado. Estudiamos aparte los tres casos singulares.

a) Todas las soluciones para $\alpha = 1$.

Sustituimos $\alpha = 1$ en el sistema:

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1, \\ x + y = 4, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$$

La tercera ecuación es el doble de la segunda, también en su término independiente. Por ello, la tercera fila de la matriz ampliada es el doble de la segunda y el rango de la ampliada no puede ser mayor que 2. Comprobamos que el rango sí alcanza 2 mediante un menor no nulo de orden 2, usando las filas 1 y 2 y las columnas de y, z :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4 \neq 0.$$

Este mismo menor está en A , así que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché-Frobenius, es un sistema compatible indeterminado. Para resolverlo tomamos $x = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. De $x + y = 4$,

$$y = 4 - \lambda.$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$3(4 - \lambda) + 4z = 1 \implies 12 - 3\lambda + 4z = 1 \implies z = \frac{-11 + 3\lambda}{4}.$$

Conclusión: es compatible indeterminado y todas sus soluciones son

$$(x, y, z) = (\lambda, 4 - \lambda, (-11 + 3\lambda)/4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Compatibilidad para $\alpha = 2$.

Al sustituir $\alpha = 2$, obtenemos

$$\begin{cases} -x + 5y + 6z = 2, \\ 2x + 2y = 6, \\ 2x + 3y + z = 9. \end{cases}$$

El determinante general ya calculado vale cero en $\alpha = 2$, así que $\text{rg}(A) \leq 2$. Un menor de orden 2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 2 = -12 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$. Para la ampliada calculamos un menor de orden 3 con las columnas de x, y y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -26 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A^*) = 3$, distinto de $\text{rg}(A) = 2$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Conclusión: para $\alpha = 2$ no existe ninguna solución.

c) Valores de α para los que el sistema es compatible determinado.

Si $\alpha \neq 0, 1, 2$, el determinante es distinto de cero. Entonces

$$\text{rg}(A) = 3 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 3,$$

de modo que el sistema es SCD. Completamos la discusión revisando los valores excluidos:

Para $\alpha = 0$, la segunda ecuación queda $0 = 2$, que es imposible. Además, el menor de A formado por las filas 1 y 3 y las columnas x, z vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada calculamos este menor de orden 3, tomando las filas 1, 2 y 3 y las columnas x, z y el término independiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10 \neq 0;$$

por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

Para $\alpha = 1$, hemos obtenido $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: es SCI, no SCD. Para $\alpha = 2$, hemos obtenido $\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*)$: es incompatible.

Conclusión: el sistema es compatible determinado exactamente cuando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

B.2. Rectas y planos

Las rectas vienen dadas como intersección de planos:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x - z + 2 = 0, \end{cases} \quad s: \begin{cases} 3y + 1 = 0, \\ x - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Primero las pasamos a forma paramétrica. Para r , elegimos $z = 2t$. De la segunda ecuación,

$$2x - 2t + 2 = 0 \implies x = -1 + t.$$

La primera da

$$(-1 + t) - y + 3 = 0 \implies y = 2 + t.$$

Por tanto,

$$r: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

con punto $P_r = (-1, 2, 0)$ y vector director $\vec{d}_r = (1, 1, 2)$.

Para s , elegimos $z = u$. Las ecuaciones dan

$$y = -\frac{1}{3}, \quad x = 3 + 2u.$$

Así,

$$s: \begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = -\frac{1}{3}, \\ z = u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R},$$

con punto $P_s = (3, -1/3, 0)$ y vector director $\vec{d}_s = (2, 0, 1)$.

a) Plano paralelo a s que contiene a r .

El plano debe contener el punto P_r y las direcciones $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, -2).$$

Usamos la forma general del plano $ax + by + cz + d = 0$, con normal $(a, b, c) = (1, 3, -2)$, y hacemos que pase por $(-1, 2, 0)$:

$$1(x + 1) + 3(y - 2) - 2(z - 0) = 0.$$

Desarrollando,

$$x + 1 + 3y - 6 - 2z = 0 \implies \boxed{\pi: x + 3y - 2z - 5 = 0}.$$

Comprobación: al sustituir $P_r = (-1, 2, 0)$, el lado izquierdo vale $-1 + 6 - 5 = 0$. Además, los vectores directores de r y s son perpendiculares al normal $(1, 3, -2)$, así que el plano contiene la dirección de r y es paralelo a s .

b) Recta por el origen perpendicular a las direcciones de r y s .

Un vector perpendicular a ambos directores es su producto vectorial, ya calculado:

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 3, -2).$$

Una recta que pasa por el origen y tiene ese vector director, escrita en forma paramétrica, es

$$t : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = -2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos la perpendicularidad:

$$(1, 3, -2) \cdot (1, 1, 2) = 1 + 3 - 4 = 0, \quad (1, 3, -2) \cdot (2, 0, 1) = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Conclusión: la recta pedida es la recta t anterior.

c) ¿Existe un plano perpendicular a s que contenga a r ?

Si un plano es perpendicular a la recta s , un vector normal del plano tiene que ser paralelo a $\vec{d}_s = (2, 0, 1)$. Pero, para que el plano contenga a r , su normal debe ser perpendicular a $\vec{d}_r = (1, 1, 2)$. Comprobamos el producto escalar necesario:

$$\vec{d}_s \cdot \vec{d}_r = (2, 0, 1) \cdot (1, 1, 2) = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0.$$

Ningún múltiplo no nulo de $\vec{d}_s$ puede ser perpendicular a $\vec{d}_r$. Por tanto, no se puede cumplir a la vez que el plano sea perpendicular a s y contenga a r .

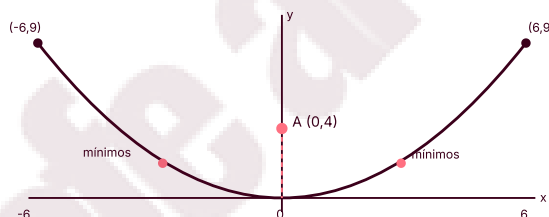
Conclusión: no existe tal plano.

B.3. Distancias desde el pueblo al río

El pueblo está en $A = (0, 4)$ y el tramo del río satisface $y = x^2/4$, con $-6 \leq x \leq 6$. Un punto genérico del río es

$$P(x) = \left(x, \frac{x^2}{4}\right), \quad x \in [-6, 6].$$

Vista orientativa del tramo y de sus puntos de interés (no está a escala):



a) Expresión de la distancia en función de x .

La distancia entre dos puntos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Aplicamos la fórmula a $A = (0, 4)$ y $P(x) = (x, x^2/4)$:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}, \quad -6 \leq x \leq 6. \end{aligned}$$

El radicando es suma de cuadrados y no puede ser cero: si $x = 0$, el segundo cuadrado vale 16. La distancia está definida en todo el tramo.

b) Punto o puntos del río a distancia mínima.

Para localizar los extremos es más sencillo estudiar $g(x) = d^2(x)$. Como la raíz cuadrada es creciente para valores no negativos, g y d alcanzan sus mínimos y máximos en los mismos valores de x .

$$g(x) = \frac{x^4}{16} - x^2 + 16, \quad g'(x) = \frac{x^3}{4} - 2x = \frac{x(x^2 - 8)}{4}.$$

Igualemos la derivada a cero:

$$\frac{x(x^2 - 8)}{4} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x^2 = 8 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Estudiamos el signo de g' en cada intervalo del dominio, probando valores entre los puntos críticos:

Intervalo	Valor de prueba	Sustitución en $g'(x)$	Signo	Comportamiento
$(-6, -2\sqrt{2})$	-4	$(-4)(16 - 8)/4 = -8$	-	Decrece
$(-2\sqrt{2}, 0)$	-1	$(-1)(1 - 8)/4 = 7/4$	+	Crece
$(0, 2\sqrt{2})$	1	$(1)(1 - 8)/4 = -7/4$	-	Decrece
$(2\sqrt{2}, 6)$	4	$(4)(16 - 8)/4 = 8$	+	Crece

En $x = -2\sqrt{2}$ y $x = 2\sqrt{2}$ el signo cambia de negativo a positivo; son mínimos. Calculamos la distancia en esos puntos:

$$d^2(\pm 2\sqrt{2}) = \frac{64}{16} - 8 + 16 = 12,$$

$$d(\pm 2\sqrt{2}) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad y = \frac{(\pm 2\sqrt{2})^2}{4} = 2.$$

Conclusión: los puntos más cercanos son $(-2\sqrt{2}, 2)$ y $(2\sqrt{2}, 2)$, a distancia mínima $d_{\min} = 2\sqrt{3}$.

c) Punto o puntos del río a distancia máxima.

Como el tramo está restringido al intervalo cerrado $[-6, 6]$, comparamos los puntos críticos interiores con los extremos. En $x = 0$ hay un máximo local; en los extremos calculamos:

$$d^2(0) = 16, \quad d(0) = 4; \quad d^2(\pm 6) = \frac{6^4}{16} - 6^2 + 16 = 61, \quad d(\pm 6) = \sqrt{61}.$$

Como $61 > 16$ y los otros puntos críticos son mínimos, los extremos dan la distancia máxima. En el río, $y = (\pm 6)^2/4 = 9$.

Conclusión: los puntos más alejados son $(-6, 9)$ y $(6, 9)$, a distancia máxima $d_{\max} = \sqrt{61}$.