

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda, invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75%, la de la segunda del 11,25% y, finalmente, la de la tercera es del 10%. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Solución:

Los datos del problema resumidos en una tabla son:

	Urbano	Industrial	Rústico	Inversión total de la constructora	rentabilidad de la constructora (%)
1ª constructora	500.000 €	250.000 €	250.000 €	1.000.000 €	13,75
2ª constructora	125.000 €	250.000 €	125.000 €	500.000 €	11,25
3ª constructora	100.000 €	100.000 €	200.000 €	400.000 €	10
rentabilidad terreno (%)	x	y	z		

Las incógnitas que utilizamos son x, y, z rentabilidades (%) de los terrenos urbano, industrial y rústico, respectivamente.

El sistema que se plantea es:

$$\begin{cases} 500.000 x + 250.000 y + 250.000 z = 13,75 \cdot 1.000.000 \\ 125.000 x + 250.000 y + 125.000 z = 11,25 \cdot 500.000 \\ 100.000 x + 100.000 y + 200.000 z = 10 \cdot 400.000 \end{cases}$$

Simplificando por 1000,

$$\begin{cases} 500 x + 250 y + 250 z = 13.750 \\ 125 x + 250 y + 125 z = 5625 \\ 100 x + 100 y + 200 z = 4000 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss. Escribiremos como primera fila de la matriz la correspondiente a la tercera ecuación,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 500 & 250 & 250 & 13750 \\ 125 & 250 & 125 & 5625 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 5x F_1 \\ F_3 - 1,25x F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 0 & -250 & -750 & -6250 \\ 0 & 125 & -125 & 625 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2} x F_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 0 & -250 & -750 & -6250 \\ 0 & 0 & -500 & -2500 \end{array} \right)$$

De la tercera fila: $-500 z = -2500$; $z = 5$

De la segunda fila: $-250 y - 750 z = -6250$
 $-250 y - 750 \cdot 5 = -6250$
 $-250 y - 3750 = -6250$
 $-250 y = -6250 + 3750$
 $-250 y = -2500$; $y = 10$

De la primera fila: $100 x + 100 y + 200 z = 4000$
 $100 x + 100 \cdot 10 + 200 \cdot 5 = 4000$
 $100 x + 1000 + 1000 = 4000$
 $100 x + 2000 = 4000$
 $100 x = 4000 - 2000$; $100 x = 2000$; $x = 20$

Solución: El terreno urbano produce una rentabilidad de 20%, el industrial del 10% y el rústico del 5%.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a)

 y es una función polinómica, por lo tanto, su dominio es todos los números reales. $\text{Dom } y = \mathbb{R}$ Puntos de corte de la función y con los ejes coordenados. $x = 0$; $y = 3$; punto de corte con el eje OY $(0, 3)$ $y = 0$; $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$, resolvemos esta ecuación por Ruffini

1	1	-5	3	La ecuación tiene dos soluciones
1	1	2	-3	$x = 1$, solución doble
1	2	-3	0	$x = -3$
1	1	3		Puntos de corte con el eje OX
1	3	0		$(1, 0)$ y $(-3, 0)$
-3	-3			
1	0			

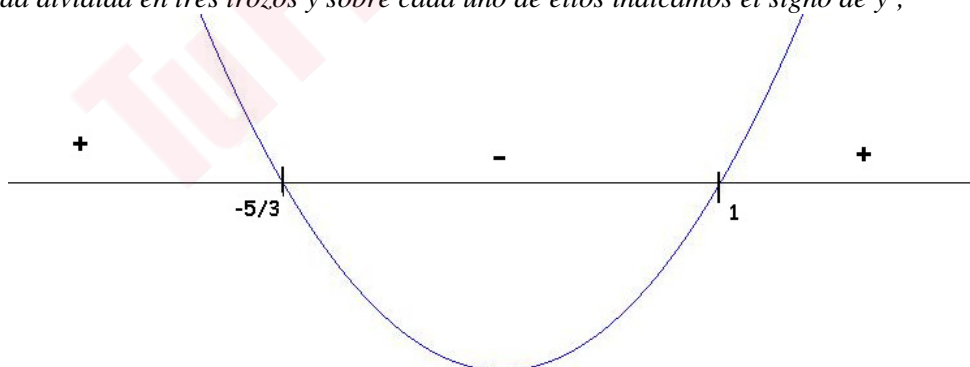
b) Estudiar la monotonía de y . Debemos estudiar el signo de y' .

$$y' = 3x^2 + 2x - 5$$

$$\text{Resolvemos } 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Representamos en la recta real los dos valores de x obtenidos; dibujamos, de forma aproximada, la parábola que representa a y' .La recta queda dividida en tres trozos y sobre cada uno de ellos indicamos el signo de y' ,

Por lo tanto la función y es creciente en $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

c) Máximos y mínimos locales.

Resolvemos $y' = 0$, ya resuelto en el apartado anterior.

$$\text{Calculamos } y'' = 6x + 2$$

$$\text{para } x = -5/3; y'' = 6(-5/3) + 2 = -10 + 2 = -8 < 0; \text{ hay un máximo local}$$

$$\text{para } x = 1; y'' = 6 \cdot 1 + 2 = 8 > 0; \text{ hay un mínimo local.}$$

Calculemos las ordenadas de los extremos,

para $x = 1$, según calculamos en el apartado a) $y = 0$; Mínimo local en $(1, 0)$

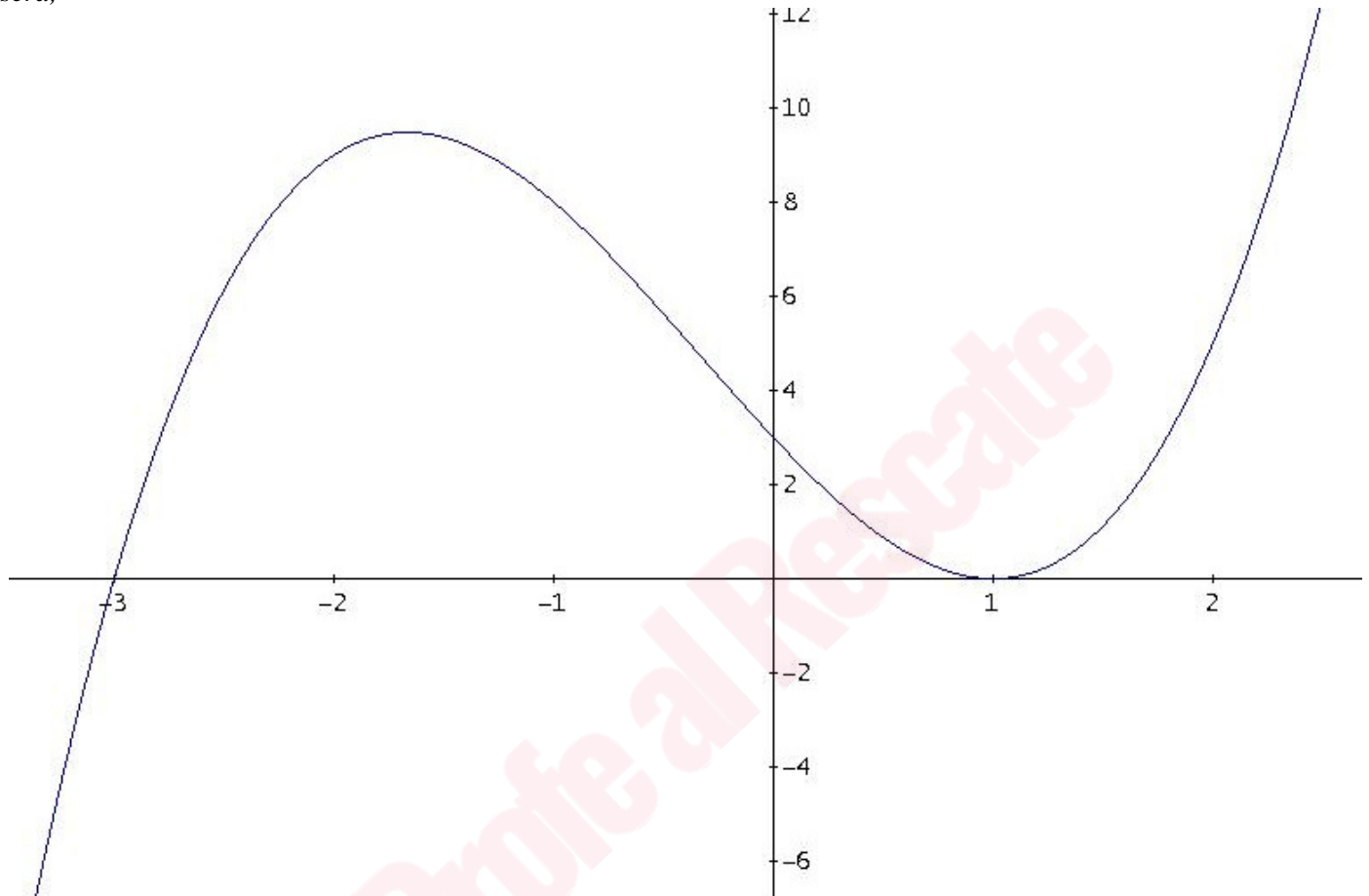
para

$$x = \frac{-5}{3} \rightarrow y = \left(\frac{-5}{3}\right)^3 + \left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{3}\right) + 3 = \frac{-125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} + 3 = \frac{-125 + 75 + 225 + 81}{27} = \frac{256}{27}$$

Máximo local en $\left(\frac{-5}{3}, \frac{256}{27}\right) \approx (-1'67, 9'48)$

d) Representación gráfica.

En los ejes coordenados marcamos los puntos de corte obtenidos en el apartado a), los extremos relativos del apartado c) y teniendo en cuenta la monotonía estudiada en el apartado b), la representación gráfica de la función y será,



EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Los beneficios anuales $B(x)$, en miles de euros, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde x representa el número de años a partir del actual:

$$B(x) = \frac{25x}{x^2 + 16}$$

- a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la empresa obtenga el máximo beneficio y cuál es el valor de dicho beneficio? Justifica que es máximo.
 b) ¿Puede esta empresa tener pérdidas algún año? ¿Por qué?

Solución:

a)

Como x representa el número de años a partir del actual, x tomará valores mayores o iguales que 0.

En la definición de $B(x)$ tenemos como denominador la expresión $x^2 + 16$ que es distinta de cero para cualquier valor de x .

Por lo tanto el dominio de la función $B(x)$ son los reales no negativos. Teniendo en cuenta esta restricción busquemos el máximo de $B(x)$.

Empezamos realizando el cálculo como si el dominio de $B(x)$ fueran todos los números reales.

$$B'(x) = \frac{25(x^2 + 16) - 2x \cdot 25x}{(x^2 + 16)^2} = \frac{25x^2 + 400 - 50x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2}$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2} = 0 \rightarrow -25x^2 + 400 = 0$$

$$25x^2 = 400$$

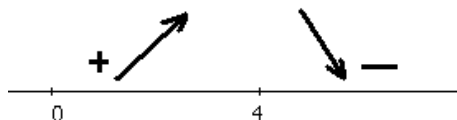
$$x^2 = \frac{400}{25} = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

En $B'(x)$ el signo está determinado por el numerador (el denominador es un polinomio elevado al cuadrado, luego siempre positivo). El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo, luego el signo de $B'(x)$ será,



Como el dominio de $B(x)$ son los números no negativos, consideramos el signo de $B'(x)$ en este dominio,



Por lo tanto en $x = 4$ $B(x)$ presenta un máximo relativo que además es el absoluto ya que a la izquierda de $x=4$ $B(x)$ es creciente y a la derecha es decreciente.

$$\text{Para } x = 4 \quad B(x) = \frac{25 \cdot 4}{4^2 + 16} = \frac{100}{32} = 3'125$$

Solución: para que la empresa obtenga el máximo beneficio han de transcurrir 4 años, al cabo de los cuales obtendrá un beneficio de 3125 €.

b)

La empresa tendrá pérdidas cuando $B(x)$ sea negativo.

Los valores que puede tomar la variable x son no negativos, por lo tanto el numerador de $B(x)$, $25x$, es no negativo. El denominador de $B(x)$, $x^2 + 16$, es positivo para cualquier valor de x . En consecuencia:

$$\forall x \in \text{Dom}(B(x)) \quad B(x) \geq 0$$

Es decir, la empresa nunca tendrá pérdidas.

Otra forma de resolver este apartado es haciendo una representación gráfica aproximada de $B(x)$.

Estudiamos los siguientes apartados:

Máximo relativo (4 , 3'125) (obtenido en el apartado anterior).

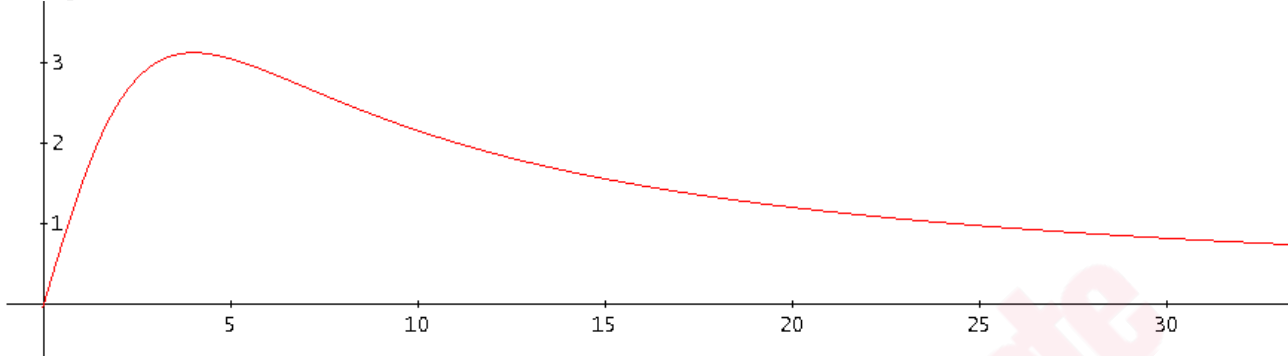
Cortes con los ejes,

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = \frac{25 \cdot 0}{0^2 + 16} = 0 \quad (0,0) \\ y=0 \rightarrow \frac{25x}{x^2 + 16} = 0 \rightarrow 25x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (0,0) \end{array} \right.$$

Asíntota,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x}{x^2 + 16} = 0 \rightarrow y = 0 \quad A.H. \text{ en } +\infty$$

La representación será:



Como los valores que toma la función $B(x)$ nunca son negativos, la empresa no tiene pérdidas.

Tu Profecia al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean A y B dos sucesos con $P(A \cup B) = 0,9$; $P(\bar{A}) = 0,4$, donde $\bar{A}$ denota el suceso contrario o complementario del suceso A, y $P(A \cap B) = 0,2$. Calcular las probabilidades siguientes: $P(B)$, $P(A/B)$, $P(A \cap \bar{B})$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

Solución:

Cálculo previo:

$$P(\bar{A}) = 0,4. \text{ Como } P(\bar{A}) = 1 - P(A); \quad 0,4 = 1 - P(A); \quad P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Cálculo de $P(B)$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 0,6 + P(B) - 0,2; \quad 0,9 = 0,4 + P(B); \quad \mathbf{P(B) = 0,5}$$

Cálculo de $P(A/B)$,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

Cálculo de $P(A \cap \bar{B})$,

Llamando Ω al suceso seguro, al que ocurre siempre, y $\emptyset$ al suceso imposible, se cumplirá

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) - P((A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) - P(\emptyset) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

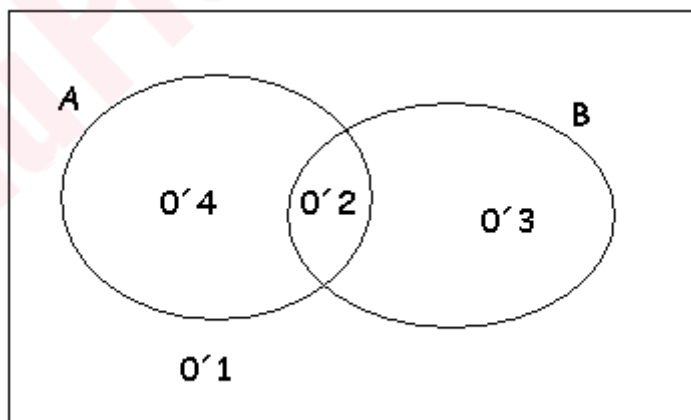
$$\text{Luego } 0,6 = 0,2 + P(A \cap \bar{B}) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,4$$

Cálculo de $P(\bar{A} \cup \bar{B})$,

Por las Leyes de Morgan sabemos que $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

$$\text{Luego } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Representando los sucesos en un diagrama de Venn podemos comprobar la validez de los resultados obtenidos,



EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -6 \\ x & + & z = 5 \\ 2x - y & = & 11 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5 \neq 0 \quad \text{podemos resolverlo por el método de Cramer.}$$

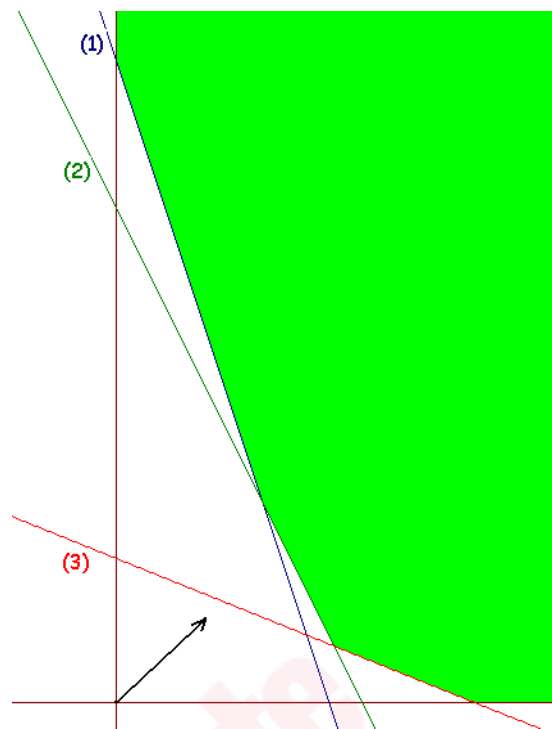
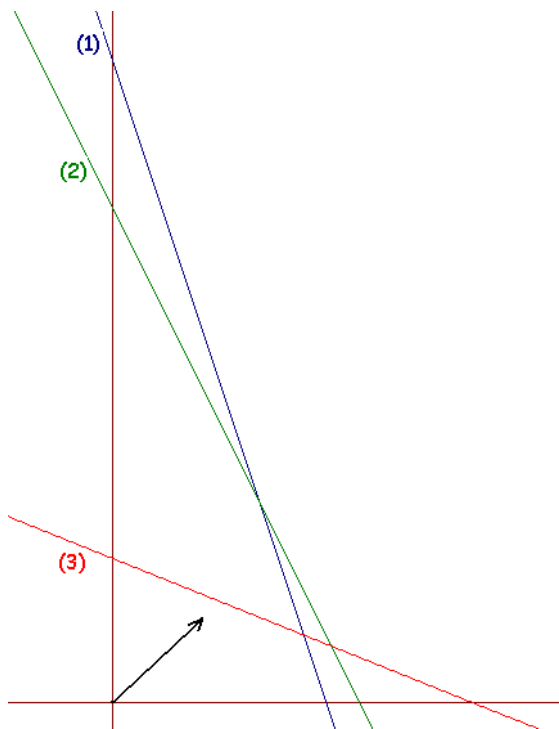
$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10 + 11 - 6}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-22 - 12 + 20 - 11}{5} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 + 10 + 5 - 11}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -5$, $z = 2$

La región factible son los puntos de coordenada natural de la zona sombreada en la figura de la derecha.



Calculemos los extremos de la región factible.

Debemos buscar los puntos de corte entre las rectas (1) y (2) y (1) y (3)

Corte entre (1) y (2)

$$\begin{cases} 0'3x + 0'1y = 26300 \\ 0'4x + 0'2y = 40600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} *(-2) \left\{ \begin{aligned} -0'6x - 0'2y &= -52600 \\ 0'4x + 0'2y &= 40600 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones: } -0'2x = -12000$$

$$x = \frac{-12000}{-0'2} = 60000$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$$0'3 \cdot 60000 + 0'1y = 26300$$

$$18000 + 0'1y = 26300$$

$$0'1y = 8300$$

$$y = 83000$$

el punto de corte es (60000 , 83000)

Corte entre (2) y (3)

$$\begin{cases} 0'4x + 0'2y = 40600 \\ 0'2x + 0'5y = 29500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} :(-2) \left\{ \begin{aligned} -0'2x - 0'1y &= -20300 \\ 0'2x + 0'5y &= 29500 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones: } 0'4y = 9200$$

$$y = \frac{9200}{0'4} = 23000$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,

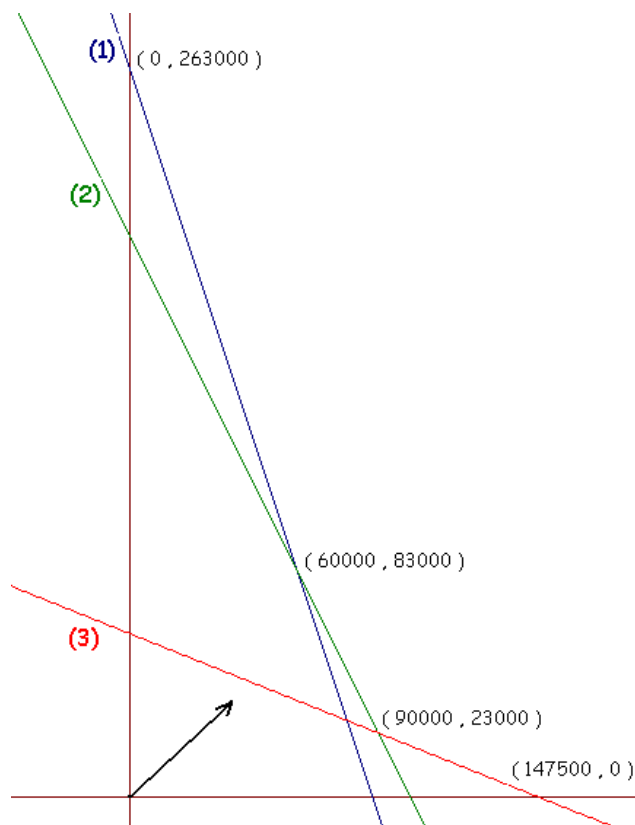
$$0'4x + 0'2 \cdot 23000 = 40600$$

$$0'4x + 4600 = 40600$$

$$0'4x = 36000$$

$$x = 90000$$

el punto de corte es (90000 , 23000)



Estudiamos los valores de z en los extremos de la región factible,

(x, y)	$z = 70x + 65y$	Mínimo
$(0, 26300)$	$70 \cdot 0 + 65 \cdot 26300 = 17\,095\,000$	
$(60000, 83000)$	$70 \cdot 60000 + 65 \cdot 83000 = 9\,595\,000$	
$(90000, 23000)$	$70 \cdot 90000 + 65 \cdot 23000 = 7\,795\,000$	
$(147500, 0)$	$70 \cdot 147500 + 65 \cdot 0 = 10\,325\,000$	

Solución: para que la refinería cubra sus necesidades de producción con un coste mínimo debe comprar **90000 barriles de crudo ligero** y **23000 barriles de crudo pesado**; el coste de esta operación será de **7795000 €**.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.

a) Estudia la continuidad en el intervalo $[-3,3]$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+10 & -3 \leq x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x < 1 \\ \frac{x+3}{2} & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b) Halla la integral entre 2 y 3 de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$.

Solución:

a)

En el intervalo $[-3, -2]$ $f(x)$ está definida mediante tres trozos, estudiemos la continuidad de cada trozo y en los puntos de cambio de definición.

En el intervalo $(-3, -2)$ $f(x)$ está definida como $3x + 10$, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo $(-2, 1)$ $f(x)$ está definida como x^2 , un polinomio, luego es continua.

En el intervalo $(1, 3)$ $f(x)$ está definida como $(x+3)/2$, un polinomio, luego es continua.

Veamos la continuidad de $f(x)$ en los puntos de cambio de definición.

Para $x = -2$	$f(-2) = (-2)^2 = 4$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x+10) = 3(-2)+10 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 = (-2)^2 = 4 \end{cases} = 4$ $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ Luego $f(x)$ es continua en $x = -2$
Para $x = 1$	$f(1) = \frac{1+3}{2} = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases} \neq 2 \quad \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ Luego $f(x)$ no es continua en $x = 1$. En $x = 1$ $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito ya que existen los límites laterales pero son distintos.

En conclusión $f(x)$ es continua en $(-3, 3) \sim \{1\}$ y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Como $f(x)$ está definida en un intervalo cerrado, $[-3, 3]$, en sentido estricto no podemos hablar de continuidad de $f(x)$ en los extremos de este intervalo; en sentido no estricto podemos considerar que $f(x)$ es continua en $x = -3$ por ser continua a la derecha de este valor y que $f(x)$ es continua en $x = 3$ por serlo a la izquierda de este valor. Con esta consideración de continuidad en los extremos del intervalo de definición de una función, podemos concluir que $f(x)$ es continua en $[-3, 3] \sim \{1\}$ y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b)

$$\begin{aligned} \int_2^3 (2x^3 - 3x + 2) dx &= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{12}{2} + 4 \right) = \\ &= \frac{54}{2} + 6 - (8 - 6 + 4) = 27 + 6 - 6 = 27 \end{aligned}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. El volumen de producción diario en tres fábricas diferentes de una misma empresa es de 1.000 unidades en la primera fábrica, 1.500 unidades en la segunda y 2.500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto, lo son el 1% de las unidades producidas en las dos primeras fábricas y el 3% de las producidas en la tercera.

- ¿Qué proporción de unidades fabricadas son correctas?
- Si se tiene una unidad defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fábrica?

Solución:

a)

Expresando los datos del problema en una tabla,

	Producción	unidades defectuosas
1ª fábrica	1000 unidades	1%
2ª fábrica	1500 “	1%
3ª fábrica	2500 “	3%
Total	5000 unidades	

La proporción de unidades correctas la obtendremos mediante el siguiente cálculo

$$\frac{1000 \cdot 0'99 + 1500 \cdot 0'99 + 2500 \cdot 0'97}{5000} = \frac{990 + 1485 + 2425}{5000} = \frac{4900}{5000} = 0'98$$

La proporción de unidades correctas es del 98%

b)

Consideramos los siguientes sucesos

D = unidad defectuosa

$F1$ = unidad de la fábrica 1

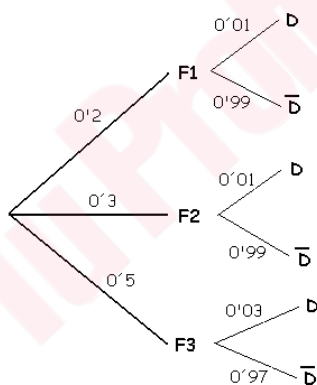
$F2$ = unidad de la fábrica 2

$F3$ = unidad de la fábrica 3

De los datos del problema podemos obtener las siguientes probabilidades,

$$P(F1) = \frac{1000}{5000} = 0'2 \quad P(F2) = \frac{1500}{5000} = 0'3 \quad P(F3) = \frac{2500}{5000} = 0'5$$

El árbol de sucesos es



La probabilidad que nos preguntan es

$$P\left(\frac{F3}{D}\right) = \frac{P(F3 \cap D)}{P(D)}$$

$$P(F3 \cap D) = 0'5 \cdot 0'03 = 0'015$$

$$P(D) = P\left(\frac{D}{F1}\right)P(F1) + P\left(\frac{D}{F2}\right)P(F2) + P\left(\frac{D}{F3}\right)P(F3) =$$

$$= 0'01 \cdot 0'2 + 0'01 \cdot 0'3 + 0'03 \cdot 0'5 = 0'002 + 0'003 + 0'015 = 0'02$$