

Se desarrollan las dos opciones completas. En cada apartado se indican las ideas necesarias y se justifican los resultados.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Para calcular el producto pedido, primero elevamos al cuadrado la matriz cuadrada A y después efectuamos las multiplicaciones en el orden indicado. Así se comprueba también que las dimensiones de los productos son compatibles:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Como A^2 es 2×2 , B es 2×3 y C^T es 3×2 , los productos sucesivos están definidos:

$$A^2 B = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 34 & 43 \\ 15 & 19 & 24 \end{pmatrix},$$

$$A^2 B C^T = \begin{pmatrix} 27 & 34 & 43 \\ 15 & 19 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 & 326 \\ 125 & 182 \end{pmatrix}.$$

Para resolver $AX + B = 2C$, aislamos X . Como A es invertible, multiplicamos por A^{-1} por la izquierda:

$$X = A^{-1}(2C - B).$$

En efecto, $\det A = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$, y por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2C - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -36 & -13 \\ 5 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 B C^T = \begin{pmatrix} 224 & 326 \\ 125 & 182 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -13 & -36 & -13 \\ 5 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Derivación y optimización

a) El dominio de f es $\mathbb{R}$, pues la exponencial está definida para todo real y $x^2 + 2 > 0$, de modo que el denominador nunca se anula. Escribimos la función como $e^{2x}(x^2 + 2)^{-2}$ y aplicamos la regla del producto y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x}(x^2 + 2)^{-2} - 4xe^{2x}(x^2 + 2)^{-3} \\ &= \frac{2e^{2x}(x^2 + 2) - 4xe^{2x}}{(x^2 + 2)^3} = \frac{2e^{2x}(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^3}. \end{aligned}$$

b) La función $N(t) = at^2 + bt$ es una parábola. Como alcanza su máximo en el punto interior $t = 4$, su derivada debe anularse allí. Además, el valor máximo indicado permite plantear una segunda ecuación:

$$N'(t) = 2at + b, \quad N'(4) = 0 \implies 8a + b = 0,$$

$$N(4) = 160 \implies 16a + 4b = 160.$$

De la primera ecuación, $b = -8a$. Sustituyendo en la segunda:

$$16a - 32a = 160 \implies a = -10, \quad b = 80.$$

Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el punto crítico es efectivamente un máximo.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^3}; \quad a = -10, \quad b = 80.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y probabilidad condicionada

Llamamos T_N al suceso «se traslada una bola negra», T_B a «se traslada una bola blanca» y N_2 a «la bola extraída de la segunda urna es negra». Las probabilidades de traslado son $P(T_N) = 3/7$ y $P(T_B) = 4/7$. En una misma rama se multiplican las probabilidades sucesivas; si varios caminos incompatibles conducen al suceso, se suman sus probabilidades.

Si se traslada una negra, la segunda urna queda con 3 blancas y 6 negras, por lo que $P(N_2 | T_N) = 6/9 = 2/3$. Si se traslada una blanca, queda con 4 blancas y 5 negras, y $P(N_2 | T_B) = 5/9$. Por la probabilidad total:

$$P(N_2) = P(T_N)P(N_2 | T_N) + P(T_B)P(N_2 | T_B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{38}{63}.$$

Para la segunda pregunta usamos la definición de probabilidad condicionada. Si se trasladó una negra, quedan 3 bolas blancas de 9 en la segunda urna; si se trasladó una blanca, quedan 4 de 9:

$$P(T_N | B_2) = \frac{P(T_N \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{9}{25},$$

donde B_2 representa que la extracción de la segunda urna es blanca.

$P(\text{extraer negra de la segunda urna}) = \frac{38}{63}, \quad P(\text{traslado negro} \mid \text{segunda extracción blanca}) = \frac{9}{25}.$
--

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

Sea μ la longitud media de las piezas. Queremos comprobar si la máquina produce piezas con longitud media superior a 10 cm; por eso planteamos un contraste unilateral a la derecha:

$$H_0 : \mu \leq 10, \quad H_1 : \mu > 10.$$

Se conoce $\sigma = 0,2$ cm y se toma una muestra de tamaño $n = 1000$. Bajo el valor frontera $\mu_0 = 10$, el estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Para $\alpha = 0,025$, el valor crítico de una cola es $z_{0,975} \approx 1,96$; se rechaza H_0 si $Z > 1,96$. En términos de la media muestral, la región de rechazo es

$$\bar{X} > 10 + 1,96 \frac{0,2}{\sqrt{1000}} \approx 10,0124 \text{ cm}.$$

La media observada es 10,0037 cm, que queda por debajo del umbral. Equivalentemente,

$$z_{\text{obs}} = \frac{10,0037 - 10}{0,2/\sqrt{1000}} \approx 0,585 < 1,96.$$

Por tanto, no se rechaza la hipótesis nula: con un nivel de significación del 2,5%, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que la media supere los 10 cm.

No se rechaza H_0 ; no hay evidencia suficiente de que $\mu > 10$ cm.

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

El recinto factible está definido por $x + y \leq 20$, $3x + 5y \geq 70$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Comprobamos el punto (4,1, 11,7):

$$4,1 + 11,7 = 15,8 \leq 20, \quad 3 \cdot 4,1 + 5 \cdot 11,7 = 70,8 \geq 70.$$

Sus dos coordenadas son no negativas, así que el punto pertenece al recinto.

Los vértices se obtienen intersectando las rectas frontera y conservando los puntos que satisfacen todas las restricciones. Sobre el eje y , las fronteras dan (0, 14) y (0, 20). La intersección de las dos rectas oblicuas se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 3x + 5y = 70, \end{cases} \implies (x, y) = (15, 5).$$

No hay vértice sobre el eje x , pues allí las desigualdades exigirían simultáneamente $x \leq 20$ y $x \geq 70/3$. El recinto es, por tanto, el triángulo de vértices (0, 14), (0, 20), (15, 5).

La función objetivo lineal $F(x, y) = 0,6x + y$ alcanza sus extremos en los vértices. Evaluamos:

(x, y)	$(0, 14)$	$(0, 20)$	$(15, 5)$
$F(x, y)$	14	20	14

Además, sobre el lado $3x + 5y = 70$ se cumple $y = 14 - 0,6x$, luego $F = 0,6x + y = 14$ en todo ese lado.

$$F_{\max} = 20 \text{ en } (0, 20); \quad F_{\min} = 14 \text{ en todo el segmento entre } (0, 14) \text{ y } (15, 5).$$

Ejercicio 2 · Beneficio y máximo

El beneficio se obtiene restando los gastos a los ingresos, pues representa el dinero que queda después de cubrir los costes:

$$B(t) = I(t) - G(t) = (-2t^2 + 51t) - (t^2 - 3t + 96) = -3t^2 + 54t - 96, \quad 0 \leq t \leq 18.$$

Para hallar los puntos de equilibrio igualamos ingresos y gastos, es decir, imponemos $B(t) = 0$:

$$-3t^2 + 54t - 96 = -3(t - 2)(t - 16) = 0 \implies t = 2 \text{ o } t = 16.$$

La gráfica es una parábola cóncava hacia abajo porque el coeficiente de t^2 es negativo. Corta al eje horizontal en 2 y 16, y su vértice se encuentra en

$$t_v = -\frac{54}{2(-3)} = 9, \quad B(9) = -3 \cdot 81 + 54 \cdot 9 - 96 = 147.$$

Al estar 9 dentro del intervalo de producción y abrir la parábola hacia abajo, ese vértice da el beneficio máximo.

$$\text{Puntos de equilibrio: } t = 2, 16; \quad B_{\max} = 147 \text{ miles de euros, para } t = 9.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad y probabilidad condicionada

El libro tiene $140 + 100 + 150 + 50 = 440$ páginas. El número esperado de páginas con error en cada capítulo es el producto de su longitud por su porcentaje de error:

$$140 \cdot 0,05 = 7, \quad 100 \cdot 0,04 = 4, \quad 150 \cdot 0,02 = 3, \quad 50 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, la probabilidad de escoger al azar una página con error es

$$P(E) = \frac{7 + 4 + 3}{440} = \frac{14}{440} = \frac{7}{220}.$$

En el segundo capítulo hay $100(1 - 0,04) = 96$ páginas sin error. En todo el libro hay $440 - 14 = 426$ páginas sin error. Si sabemos que la página elegida no contiene error, la probabilidad de que sea del segundo capítulo es

$$P(C_2 | E^c) = \frac{P(C_2 \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{96}{426} = \frac{16}{71}.$$

$$P(E) = \frac{7}{220}; \quad P(C_2 | E^c) = \frac{16}{71}.$$

Ejercicio 4 · Muestreo estratificado y tamaño muestral

a) En un muestreo proporcional, el tamaño muestral de cada estrato cumple $n_i/n = N_i/N$, donde N_i es el tamaño del estrato y N el de la población. Para el tercer estrato:

$$\frac{10}{n} = \frac{250}{1000} \implies n = 40.$$

b) Para estimar la media con desviación típica conocida, el error máximo en un intervalo bilateral de confianza es $E = z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Despejamos n para exigir $E \leq 1$. Con confianza del 95%, $z_{0,975} \approx 1,96$, y $\sigma = 6$:

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 6}{1} \right)^2 = 138,2976.$$

El tamaño debe ser entero y cumplir la desigualdad, así que redondeamos al entero superior.

$$n_{\min} = 139 \text{ individuos.}$$