

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2023--2024 · Convocatoria ordinaria

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio 1 · Inversa de una matriz con parámetro

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. En este caso,

$$\det A = -a(a-2)(a+1).$$

Por tanto, A es invertible cuando $a \notin \{-1, 0, 2\}$.

Para $a = -2$, el determinante no se anula y la inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$a \notin \{-1, 0, 2\}; \quad A^{-1}|_{a=-2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Primitiva y monotonía

a) Integramos la derivada y usamos el punto $(0, 2)$ para encontrar la constante:

$$f(x) = \int (x^2 + x - 2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C, \quad f(0) = C = 2.$$

Así, $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 2$.

b) La función es polinómica, por lo que está definida en todo $\mathbb{R}$. El signo de f' determina los intervalos de crecimiento:

$$f'(x) = (x+2)(x-1).$$

Los puntos críticos son $x = -2$ y $x = 1$. La derivada es positiva en $(-\infty, -2)$, negativa en $(-2, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$. Por ello, hay un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 1$. Sus ordenadas son $f(-2) = 16/3$ y $f(1) = 5/6$.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2; \quad \text{máximo local } (-2, \frac{16}{3}); \quad \text{mínimo local } (1, \frac{5}{6}).$$

Ejercicio 3 · Continuidad y área

a) La posible discontinuidad está en $x = 1$, donde se cambia de rama. El límite por la izquierda es e^2 , mientras que el valor de la función y el límite por la derecha valen ae^2 . Como $e^2 \neq 0$, la continuidad requiere $a = 1$.

b) Para $a = 1$ y $1 \leq x \leq 2$, la función vale $e^{2x} > 0$. El área con el eje de abscisas es

$$A = \int_1^2 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^2 = \frac{e^4 - e^2}{2}.$$

$$a = 1; \quad A = \frac{e^4 - e^2}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio 4 · Asíntotas y tangente

El dominio excluye los ceros del denominador:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

En $x = \pm 3$ el numerador no se anula, por lo que ambos son asíntotas verticales. Como el denominador tiene mayor grado que el numerador, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$; la asíntota horizontal es $y = 0$ y no hay oblicua.

En $x = 0$, $f(0) = 2/9$. Derivando,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 9) - 2x(x - 2)}{(x^2 - 9)^2}, \quad f'(0) = -\frac{1}{9}.$$

La ecuación punto-pendiente es $y - 2/9 = -x/9$, es decir, $y = (2 - x)/9$.

$$x = -3, x = 3 \text{ verticales; } y = 0 \text{ horizontal; } y = \frac{2 - x}{9}.$$

Ejercicio 5 · Programación lineal

Sean x e y los números de tabletas de 4 g y 3 g. Las restricciones de masa, cantidades mínimas y proporción son

$$4x + 3y \leq 60, \quad x \geq 3, \quad y \geq 8, \quad y \geq 2x.$$

El beneficio es $B(x, y) = 1,5x + y$. Los vértices factibles son (3, 8), (4, 8), (6, 12) y (3, 16). Como la función objetivo es lineal, la evaluamos en todos ellos:

(x, y)	(3, 8)	(4, 8)	(6, 12)	(3, 16)
$B(x, y)$	12,5	14	21	20,5

$$\text{Fabricar 6 tabletas de 4 g y 12 de 3 g; } B_{\max} = 21 \text{ euros.}$$

Bloque B

Ejercicio 6 · Sistema de ecuaciones

Sean g, s, c las entradas generales, de estudiante e infantiles. El total de entradas, la recaudación y la relación entre generales e infantiles se expresan como

$$g + s + c = 600, \quad 10g + 8s + 5c = 4900, \quad g = 2c.$$

Al sustituir $g = 2c$ y $s = 600 - 3c$ en la recaudación queda $4800 + c = 4900$, de donde $c = 100$. Entonces $g = 200$ y $s = 300$.

$$200 \text{ generales, } 300 \text{ de estudiante, } 100 \text{ infantiles.}$$

Ejercicio 7 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \det A = 2a(a - 1).$$

Si $a \neq 0, 1$, el determinante es distinto de cero y el sistema es compatible determinado.

Para $a = 0$, la primera fila de la matriz de coeficientes es la suma de las filas segunda y tercera, pero sus términos independientes no cumplen esa relación: $0 \neq 1 + 2$. Así, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$, luego el sistema es incompatible.

Para $a = 1$, las filas segunda y tercera coinciden con sus términos independientes. La primera aporta una condición independiente, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Con $a = 1$, restar la segunda ecuación de la primera da $x = -1$, y después $y + z = 3$.

$$a \neq 0, 1 : \text{SCD}; \quad a = 0 : \text{SI}; \quad a = 1 : \text{SCI}, \quad (x, y, z) = (-1, 3 - \lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8 · Probabilidad de conjuntos

Sean P el suceso «le gusta el pop» y T «le gusta el techno». Por inclusión-exclusión,

$$P(P \cup T) = \frac{90 + 70 - 30}{200} = \frac{130}{200} = 0,65.$$

Para que le guste el techno pero no el pop, de las 70 personas a las que les gusta el techno descontamos las 30 a las que les gustan ambos:

$$P(T \cap P^c) = \frac{70 - 30}{200} = 0,20.$$

$$P(P \cup T) = 0,65; \quad P(T \cap P^c) = 0,20.$$

Ejercicio 9 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

a) Con desviación típica conocida, el intervalo para la media es $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Para el 95%, $z_{0,975} = 1,96$:

$$120 \pm 1,96 \frac{8}{\sqrt{25}} = 120 \pm 3,136.$$

b) El error máximo debe satisfacer $E = z_{0,95}\sigma/\sqrt{n} < 1$. Para confianza del 90%, $z_{0,95} = 1,645$:

$$n > \left(\frac{1,645 \cdot 8}{1} \right)^2 = 173,1856.$$

Se redondea al entero superior.

$$IC_{95\%} = (116,864, 123,136) \text{ ml}; \quad n_{\min} = 174.$$

Ejercicio 10 · Probabilidad total y Bayes

Sean A, B, C los sucesos de que el salmón proceda de cada tanque y L que mida más de 35 mm. Por probabilidad total,

$$P(L) = 0,35(0,15) + 0,20(0,30) + 0,45(0,25) = 0,225.$$

Para calcular la probabilidad condicionada del apartado b), usamos Bayes con el suceso complementario L^c :

$$P(C | L^c) = \frac{P(C)P(L^c | C)}{P(L^c)} = \frac{0,45(0,75)}{1 - 0,225} = \frac{0,3375}{0,775} \approx 0,4355.$$

$$P(L) = 0,225; \quad P(C | L^c) \approx 0,4355.$$