

Junio de 2018 · Convocatoria ordinaria

Se desarrollan las dos opciones. En las rectas del espacio se emplea forma paramétrica y los planos se expresan en forma general.

Opción A

A.1. Sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} y - z = 1 - a, \\ -x + z = 5, \\ -ax + y - z = 1. \end{cases}$$

Escribimos la matriz de coeficientes A , la matriz ampliada A^* y la matriz de términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

a) Valores de a para los que el sistema es compatible determinado. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD) cuando $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, el número de incógnitas. Calculamos primero:

$$\begin{aligned} \det A &= -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1+a) + 1 \\ &= -a. \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, entonces $\det A = -a \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$. Como A^* tiene tres filas y contiene A , también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por tanto,

$$\boxed{a \neq 0 \implies \text{SCD.}}$$

Si $a = 0$, el determinante se anula y estudiamos los rangos mediante menores. La primera y la tercera fila de A , y también las correspondientes filas de A^* , coinciden. El menor formado por las dos primeras filas y las columnas de x, y vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = 2$. En A^* la tercera fila repite la primera y el mismo menor no nulo garantiza rango al menos 2; por ello, $\text{rg}(A^*) = 2$. Aplicando Rouché-Frobenius:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \implies \text{SCI.}$$

En conclusión, el sistema es compatible determinado exactamente para

$$\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

b) Solución para $a = 3$. Como $3 \neq 0$, el sistema es SCD. Restamos la primera ecuación de la tercera:

$$-3x = 3 \implies x = -1.$$

Con $-x + z = 5$, resulta $z = 4$; luego $y - z = 1 - 3 = -2$ da $y = 2$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (-1, 2, 4).$$

c) Soluciones para el valor de a que hace al sistema compatible indeterminado. El único caso SCI es $a = 0$. La primera y la tercera ecuaciones coinciden. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$. De $-x + z = 5$, $x = t - 5$; de $y - z = 1$, $y = t + 1$. Así,

$$(x, y, z) = (t - 5, t + 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A.2. Triángulo en el espacio

$$A = (-1, 2, \lambda), \quad B = (2, 3, 5), \quad C = (3, 5, 3).$$

a) Valor de λ para que AC sea la hipotenusa. Si AC es la hipotenusa, el ángulo recto está en B .

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares y su producto escalar debe ser cero:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (3, 1, 5 - \lambda), \\ \overrightarrow{BC} &= C - B = (1, 2, -2), \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (5 - \lambda)(-2) \\ &= 2\lambda - 5 = 0.\end{aligned}$$

Despejamos:

$$2\lambda = 5 \implies \lambda = \frac{5}{2}.$$

b) Área del triángulo para $\lambda = 6$. El área de un triángulo en el espacio es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados con el mismo origen:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

Cuando $\lambda = 6$, $A = (-1, 2, 6)$, y

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 3, -3).$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (1(-3) - (-1)3, (-1)4 - 3(-3), 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4) \\ &= (0, 5, 5).\end{aligned}$$

Su módulo es $\sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$. Por tanto,

$$\mathcal{A} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2.$$

c) Plano que contiene al triángulo para $\lambda = 6$. Un vector normal al plano es $(0, 5, 5)$, que podemos simplificar a $\vec{n} = (0, 1, 1)$. La ecuación de un plano con normal (A, B, C) que pasa por P_0 es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Usamos $A = (-1, 2, 6)$:

$$0(x + 1) + (y - 2) + (z - 6) = 0 \implies \pi: y + z - 8 = 0.$$

A.3. Función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

a) Dominio y asíntotas. El dominio excluye los valores que anulan el denominador:

$$x(x-1) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 1.$$

Por tanto,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Comprobamos las asíntotas verticales con los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Así, $x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Para $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0,$$

de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal. Comprobamos también si hay oblicua: su pendiente sería $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 0$, y la ordenada sería $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 0$. La recta obtenida vuelve a ser $y = 0$, ya identificada como horizontal; no existe asíntota oblicua.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - x) - 1 \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}.$$

En el dominio, el denominador al cuadrado es estrictamente positivo. El único punto crítico se obtiene igualando a cero el numerador:

$$1 - 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Estudiamos el signo en todos los intervalos del dominio, separados también por los puntos excluidos 0 y 1:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f' en la prueba	Comportamiento
$(-\infty, 0)$	-1	$f'(-1) = 3/4 > 0$	Creciente
$(0, 1/2)$	1/4	$f'(1/4) = 128/9 > 0$	Creciente
$(1/2, 1)$	3/4	$f'(3/4) = -128/9 < 0$	Decreciente
$(1, +\infty)$	2	$f'(2) = -3/4 < 0$	Decreciente

Por tanto, f crece en $(-\infty, 0)$ y $(0, 1/2)$, y decrece en $(1/2, 1)$ y $(1, +\infty)$. En $x = 1/2$ el signo cambia de $+$ a $-$, así que hay un máximo relativo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -4, \quad \left(\frac{1}{2}, -4\right) \text{ es un máximo relativo.}$$

Los puntos $x = 0$ y $x = 1$ no pertenecen al dominio; son asíntotas verticales, no extremos.

c) Área entre la curva, el eje x y $x = 2$, $x = 3$

En $[2, 3]$, $x > 1$, por lo que $x(x - 1) > 0$ y $f(x) > 0$. El área coincide con la integral de f . Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 1 = A(x-1) + Bx.$$

Al tomar $x = 0$, $A = -1$; al tomar $x = 1$, $B = 1$. Entonces

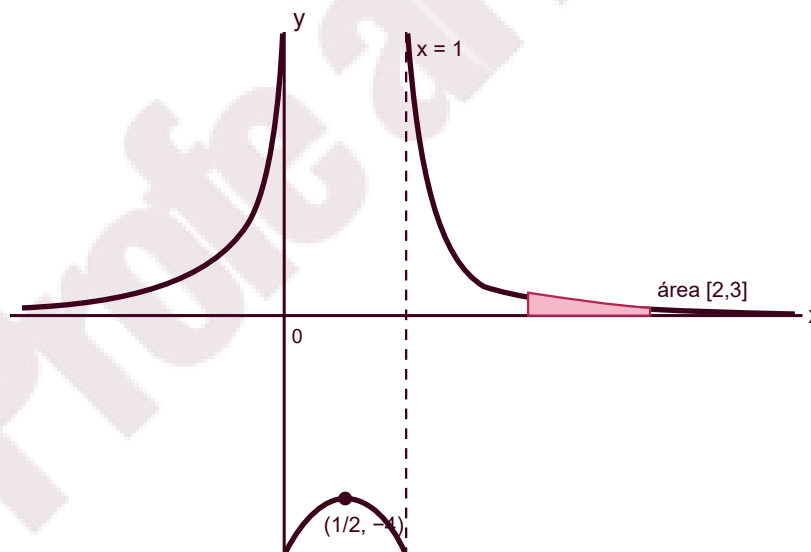
$$\frac{1}{x^2 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Desarrollamos la integral indefinida, incluyendo la constante:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + C.$$

Evaluamos entre 2 y 3 con la primitiva y escribimos ambos extremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - x} \\ &= [-\ln|x| + \ln|x-1|]_{x=2}^{x=3} \\ &= (-\ln 3 + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 1) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ u}^2}. \end{aligned}$$



Opción B

B.1. Relaciones entre potencias de una matriz

$$A^2 + 2A = 3I.$$

a) Valores de a, b para que $A^{-1} = aA + bI$. Factorizamos:

$$A(A + 2I) = 3I \Rightarrow A \left(\frac{A + 2I}{3} \right) = I.$$

Como A es cuadrada, si tiene inversa por la derecha es invertible. Además, A conmuta con $A + 2I$, así que la misma expresión también es inversa por la izquierda. Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{A + 2I}{3} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I, \quad \boxed{a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}}.$$

b) Valores de α, β para que $A^4 = \alpha A + \beta I$. Despejamos A^2 y calculamos las potencias intermedias necesarias:

$$A^2 = 3I - 2A.$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= A(3I - 2A) \\ &= 3A - 2A^2 \\ &= 3A - 2(3I - 2A) \\ &= 7A - 6I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A \cdot A^3 \\ &= A(7A - 6I) \\ &= 7A^2 - 6A \\ &= 7(3I - 2A) - 6A \\ &= 21I - 20A. \end{aligned}$$

Comparando con $\alpha A + \beta I$:

$$\boxed{\alpha = -20, \beta = 21.}$$

c) Determinante de $2B^{-1}$. Para una matriz 3×3 , $\det(kM) = k^3 \det(M)$; además, $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Como $\det(B) = 2$:

$$\det(2B^{-1}) = 2^3 \det(B^{-1}) = 8 \cdot \frac{1}{\det B} = 8 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{4}.$$

B.2. Recta perpendicular y distancias

Se dan $A = (5, 7, 3)$, $B = (1, 1, 1)$ y

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Tomamos el valor común como parámetro t . La forma paramétrica de r y su vector director son

$$r: \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -1 + 3t, t \in \mathbb{R}, \vec{v} = (-1, 3, 2). \\ z = 2t, \end{cases}$$

a) Recta s que pasa por A , corta a r y es perpendicular a r . El punto de corte H debe pertenecer a

r , y $\overrightarrow{AH}$ debe ser perpendicular a $\vec{v}$. Un punto genérico de r es $H(t) = (3 - t, -1 + 3t, 2t)$. Entonces

$$\overrightarrow{AH(t)} = H(t) - A = (-2 - t, -8 + 3t, 2t - 3).$$

Imponemos que el producto escalar sea cero:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH(t)} \cdot \vec{v} &= (-2 - t)(-1) + (-8 + 3t)3 + (2t - 3)2 \\ &= 2 + t - 24 + 9t + 4t - 6 \\ &= 14t - 28 = 0 \implies t = 2. \end{aligned}$$

Sustituimos $t = 2$ en la recta y obtenemos

$$H = (1, 5, 4), \overrightarrow{AH} = H - A = (-4, -2, 1).$$

La recta buscada pasa por A y tiene como vector director $\overrightarrow{AH}$. La damos en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = 5 - 4u, \\ y = 7 - 2u, u \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + u, \end{cases}$$

Comprobación de perpendicularidad: $(-4, -2, 1) \cdot (-1, 3, 2) = 4 - 6 + 2 = 0$.

b) Distancia de A a r . La distancia mínima es la longitud del segmento perpendicular AH :

$$d(A, r) = \|A - H\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{21}}.$$

c) Distancia de B al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r . Si un plano es perpendicular a una recta, el vector director de la recta es normal al plano. Así, podemos tomar $\vec{n} = (-1, 3, 2)$, y escribir el plano en forma general:

$$-x + 3y + 2z + D = 0.$$

Sustituimos el punto $(3, -1, 0)$ para determinar D :

$$-3 + 3(-1) + 2 \cdot 0 + D = 0 \implies D = 6.$$

Por tanto, $\pi : -x + 3y + 2z + 6 = 0$. La distancia de un punto $B = (x_B, y_B, z_B)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se calcula con

$$d(B, \pi) = \frac{|Ax_B + By_B + Cz_B + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos $B = (1, 1, 1)$ y los coeficientes del plano:

$$d(B, \pi) = \frac{|-1 + 3 + 2 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{7}}.$$

B.3. Alambre y suma de áreas

El alambre mide 100 cm. Si se destinan x cm al triángulo equilátero, quedan $100 - x$ cm para el cuadrado. El dominio indicado es $0 \leq x \leq 100$.

a) Función que expresa la suma de las áreas. El perímetro del triángulo equilátero es x , de modo que su lado mide $x/3$. Usamos la fórmula $A_T = (\sqrt{3}/4)s^2$:

$$A_T(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2.$$

El lado del cuadrado es su perímetro dividido entre cuatro, por lo que

$$s_C = \frac{100 - x}{4}, A_C(x) = s_C^2 = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 = \frac{(100 - x)^2}{16}.$$

Sumamos las áreas y conservamos las unidades en cm^2 :

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2 + \frac{(100 - x)^2}{16}, 0 \leq x \leq 100.$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x + \frac{2(100-x)(-1)}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}x + \frac{x-100}{8}.$$

Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero:

$$S'(x) = 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{18}x + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\iff 4\sqrt{3}x + 9x - 900 = 0$$

$$\iff x_* = \frac{900}{9+4\sqrt{3}} = \frac{300(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 56,50 \text{ cm.}$$

Este valor está en el intervalo. Para justificar el mínimo, comprobamos el signo a ambos lados; $50 < x_* < 60$:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de S' en la prueba	Comportamiento
$[0, x_*)$	50	$S'(50) = 25(4\sqrt{3} - 9)/36 < 0$	Decreciente
$(x_*, 100]$	60	$S'(60) = 10\sqrt{3}/3 - 5 > 0$	Creciente

La derivada cambia de negativa a positiva; por tanto, x_* es un mínimo. Además,

$S''(x) = \sqrt{3}/18 + 1/8 > 0$, de modo que la función es estrictamente convexa y el mínimo es absoluto. Sustituyendo x_* , el área mínima vale

$$S(x_*) = 625 - \frac{5625}{9+4\sqrt{3}}$$

$$= \boxed{\frac{7500\sqrt{3} - 10000}{11} \text{ cm}^2} \approx 271,85 \text{ cm}^2.$$

c) Valor de x que maximiza la suma e interpretación. Al ser una función convexa en un intervalo cerrado, el máximo se alcanza en uno de los extremos. Calculamos:

$$S(0) = \frac{100^2}{16} = 625 \text{ cm}^2, \quad S(100) = \frac{\sqrt{3}}{36} 100^2 = \frac{2500\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^2.$$

Se cumple $S(100) < S(0)$, pues $4\sqrt{3} < 9$. Por tanto,

$$\boxed{\text{máximo en } x = 0, S_{\max} = 625 \text{ cm}^2.}$$

Interpretación: cuando $x = 0$, no se reserva alambre para el triángulo y los 100 cm forman un cuadrado de lado $100/4 = 25$ cm. El triángulo degenera al tener lado cero, pero el extremo está incluido en el intervalo del enunciado.