

Modelo 1 de 2000

Se resuelven problemas de áreas, derivabilidad, propiedades de determinantes, geometría analítica y discusión de sistemas.

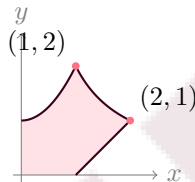
Opción A - Ejercicio 1

En el primer cuadrante, la región queda limitada por los ejes, por $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$, por $y = 2/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$, y por $y = x - 1$ entre esos dos últimos puntos. Las intersecciones que determinan los tramos son $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Por tanto,

$$S = \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - (x - 1) \right) dx.$$

La primera curva está sobre el eje x en $[0, 1]$ y, de $x = 1$ a 2 , la hipérbola está sobre la recta. Evaluamos:

$$S = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[2 \ln x - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \frac{4}{3} + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6} + 2 \ln 2}.$$



Opción A - Ejercicio 2

Para que la función a trozos sea derivable en todo $\mathbb{R}$, en $x = 2$ debe ser continua y sus derivadas laterales deben coincidir. La continuidad exige

$$2a + 20 = \frac{a}{2} + 2b \iff 3a + 40 = 4b.$$

Las derivadas de las ramas son $a + 10x$ y $-a/x^2 + b$. Al igualarlas en $x = 2$:

$$a + 20 = -\frac{a}{4} + b \iff b = \frac{5}{4}a + 20.$$

Sustituimos en la condición de continuidad: $3a + 40 = 5a + 80$, de donde $a = -20$ y $b = -5$. Así,

$$\boxed{a = -20, \quad b = -5}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Sea D el determinante dado, con $D = 2$. En (a), la primera columna se multiplica por 3 y la tercera por 5. Por la propiedad de homogeneidad del determinante,

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5D = \boxed{30}.$$

En (b), la nueva primera columna es $C_1 + 2C_2$, mientras que las columnas segunda y tercera son C_3 y C_2 . Sumar a una columna un múltiplo de otra no cambia el determinante; después se intercambian las columnas C_2 y C_3 , lo que cambia el signo:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = -D = \boxed{-2}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Los planos tienen normales $\vec{n}_1 = (1, 1, 2)$ y $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$. El vector director de su recta de intersección es

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3, 3, -3),$$

que podemos simplificar a $(1, 1, -1)$. Tomando $z = 0$ se obtiene el punto $P = (2, 2, 0)$ de la recta. La distancia del origen O a una recta que pasa por P con director $\vec{d}$ es $|\vec{OP} \times \vec{d}|/|\vec{d}|$. Así,

$$d(O, r) = \frac{|(2, 2, 0) \times (1, 1, -1)|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sean $x, y > 0$ los lados del rectángulo. El perímetro impone $2x + 2y = 40$, de modo que $y = 20 - x$ y $0 < x < 20$. El área que queremos maximizar es

$$A(x) = x(20 - x), \quad A'(x) = 20 - 2x.$$

El único punto crítico es $x = 10$. Como $A''(x) = -2 < 0$, se trata de un máximo; entonces $y = 10$. Las dimensiones buscadas son

$$\boxed{10 \text{ km} \times 10 \text{ km}}.$$

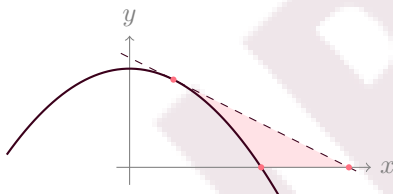
Opción B - Ejercicio 2

La curva es $f(x) = (9 - x^2)/4$. En $x = 1$, $f(1) = 2$ y $f'(x) = -x/2$, por lo que la tangente es

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1), \quad y = \frac{5 - x}{2}.$$

La parábola corta el eje x en $x = 3$ en el lado positivo, y la tangente lo corta en $x = 5$. Entre $x = 1$ y 3 la tangente está por encima de la parábola; entre 3 y 5 el recinto está entre la tangente y el eje. Luego

$$S = \int_1^3 \left(\frac{5 - x}{2} - \frac{9 - x^2}{4} \right) dx + \int_3^5 \frac{5 - x}{2} dx = \int_1^3 \frac{(x - 1)^2}{4} dx + 1 = \boxed{\frac{5}{3}}.$$



Opción B - Ejercicio 3

Parametrizamos la recta como $Q(t) = (1 + t, -3 + t, 4 + 2t)$; un punto de ella es $Q_0 = (1, -3, 4)$ y su vector director es $\vec{d} = (1, 1, 2)$. El punto de la recta más cercano a $P = (1, -3, 7)$ es su proyección ortogonal. Su parámetro se obtiene imponiendo que $P - Q(t)$ sea perpendicular a $\vec{d}$:

$$t = \frac{(P - Q_0) \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} = \frac{(0, 0, 3) \cdot (1, 1, 2)}{1 + 1 + 4} = 1.$$

Así, el punto pedido es

$$Q(1) = (2, -2, 6).$$

Opción B - Ejercicio 4

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices del sistema son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante es $\det A_\lambda = 2(\lambda - 1)(\lambda + 7)$. Si $\lambda \neq 1, -7$, el sistema es SCD. Para $\lambda = 1$, A_1 tiene rango 2 (por ejemplo, el menor superior izquierdo vale 2), y la tercera fila ampliada es $-1/2$ veces la primera más $-7/2$ veces la segunda; también se cumple esa relación en los términos independientes. Por ello $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_1^*) = 2 < 3$, y el sistema es SCI. Resolviendo dos ecuaciones independientes:

$$(x, y, z) = (1 + 2t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = -7$, el determinante también se anula y el rango de A_{-7} es 2. Las filas cumplen $R_1 - R_2 + 2R_3 = 0$, pero los términos independientes no: $3 - (-1) + 2(-6) = -8 \neq 0$. Así, $\text{rg}(A_{-7}) = 2 < \text{rg}(A_{-7}^*) = 3$, y el sistema es SI.