

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2011 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Venta de relojes

Sean a, b, c las cantidades de relojes A, B y C. El total vendido fue 200 y el número de relojes B coincide con la suma de A y C:

$$a + b + c = 200, \quad b = a + c.$$

De aquí se obtiene $b = 100$ y $a + c = 100$. La recaudación, en euros, satisface

$$200a + 500b + 250c = 73500 \implies 200a + 250c = 23500.$$

Sustituyendo $a = 100 - c$, resulta $20000 + 50c = 23500$, luego $c = 70$, $a = 30$ y $b = 100$.

Vendió 30 relojes A, 100 B y 70 C.

Problema 2 · Función racional

Para $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, el denominador no puede ser cero; por tanto $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Al acercarse a esos puntos, el numerador tiende a un valor no nulo y el denominador a cero, por lo que hay asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$. En el infinito,

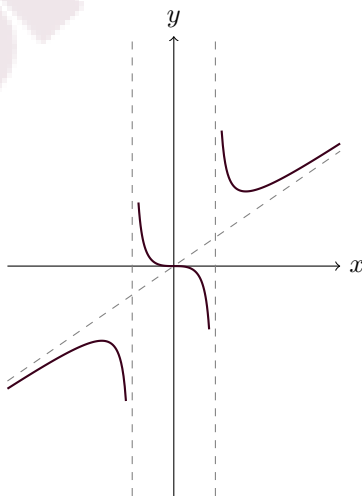
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2-1} \rightarrow 1, \quad f(x) - x = \frac{x}{x^2-1} \rightarrow 0.$$

Así, la asíntota es oblicua $y = x$ y no hay horizontal. Derivamos para estudiar crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

El denominador es positivo; el signo viene dado por $x^2 - 3$ (salvo $f'(0) = 0$, sin cambio de signo). Al dividir también por los puntos excluidos, la función crece en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$, y decrece en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$. El cambio de creciente a decreciente en $-\sqrt{3}$ da un máximo local; el cambio inverso en $\sqrt{3}$, un mínimo:

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



Máximo local $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, mínimo local $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Problema 3 · Modalidades de Bachillerato

Sean T, H, A los sucesos de estudiar Tecnología, Humanidades y Artes, y P el de aprobar todas las asignaturas. Sumamos los tres casos incompatibles para hallar la probabilidad de aprobar:

$$P(P) = 0,25 \cdot 0,70 + 0,60 \cdot 0,80 + 0,15 \cdot 0,90 = 0,79.$$

a) La probabilidad de no aprobar es $1 - 0,79 = 0,21$. b) Para invertir la condición aplicamos Bayes:

$$P(H | P) = \frac{P(H \cap P)}{P(P)} = \frac{0,60 \cdot 0,80}{0,79} = \frac{48}{79} \approx 0,6076.$$

$$P(\text{no aprobar}) = 0,21, \quad P(H | P) = \frac{48}{79} \approx 60,76\%.$$

Opción B

Problema 1 · Inversa y ecuación matricial

a) Para $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det C = -5 \neq 0$, así que

$$C^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

b) De $AX + B^T = C$ despejamos $AX = C - B^T$. Calculamos por separado:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C - B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 2 \neq 0$, multiplicamos por $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a la izquierda:

$$X = A^{-1}(C - B^T) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Función definida a trozos

a) En cada intervalo la función es polinómica y continua. Solo comprobamos la unión $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 - 2x + 3) = 0 = f(1) = 1 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

Por tanto, es continua en todo $[0, 3]$. b) En $[0, 1]$ la primera rama decrece de 3 a 0; en $[1, 3]$, $x - 1$ crece de 0 a 2. Así, el máximo absoluto es 3 en $x = 0$ y el mínimo absoluto es 0 en $x = 1$. Para el área, las dos ramas son no negativas en el intervalo de integración:

$$A = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}.$$

$$f \text{ es continua; } \max f = 3 \text{ en } x = 0, \quad \min f = 0 \text{ en } x = 1, \quad A = \frac{11}{3}.$$

Problema 3 · Aceptación de revistas

Sean A y B los sucesos de que guste cada revista. El 15% no gusta de ninguna, de modo que $P(A \cup B) = 0,85$. Además, $P(A) = 0,75$ y $P(\bar{B}) = 0,30$, así que $P(B) = 0,70$. Por inclusión-exclusión,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,75 + 0,70 - 0,85 = 0,60.$$

La probabilidad pedida en c) es

$$P(\bar{B} | A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,75} = 0,20.$$

$$P(A \cap B) = 0,60, \quad P(B) = 0,70, \quad P(\bar{B} | A) = 0,20.$$