

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2015 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Optimización de cultivos

Sean x las hectáreas de patatas e y las de zanahorias. Las restricciones de terreno, agua y abono, junto con la no negatividad, son

$$x + y \leq 200, \quad 5x + 16y \leq 2000, \quad 2x + 3y \leq 450, \quad x, y \geq 0.$$

La ganancia que queremos maximizar es $G(x, y) = 300x + 400y$. Sus máximos en la región factible se alcanzan en alguno de sus vértices. Los vértices factibles son

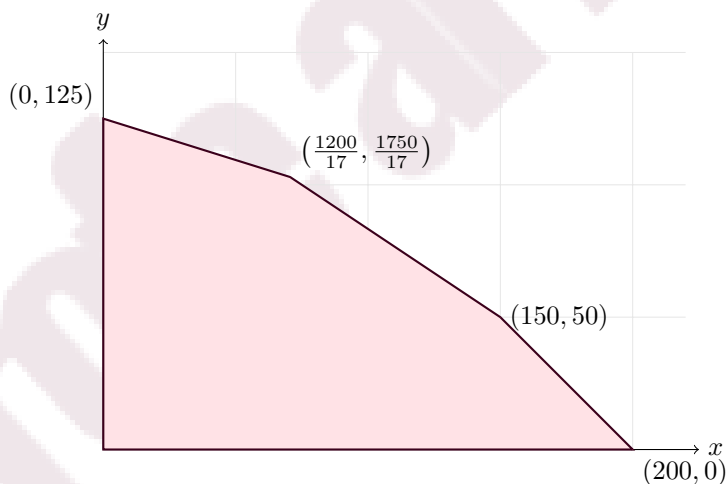
$$(0, 0), (200, 0), (150, 50), \left(\frac{1200}{17}, \frac{1750}{17}\right), (0, 125).$$

Por ejemplo, la intersección de las restricciones de agua y abono se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} 5x + 16y = 2000, \\ 2x + 3y = 450 \end{cases} \implies (x, y) = \left(\frac{1200}{17}, \frac{1750}{17}\right).$$

La intersección de terreno y abono es $(150, 50)$; la intersección de terreno y agua no es factible porque incumple la restricción de abono. Evaluamos la ganancia en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(200, 0)$	$(150, 50)$	$(\frac{1200}{17}, \frac{1750}{17})$	$(0, 125)$
$G(x, y)$	0	60000	65000	1060000/17	50000



La mayor ganancia es 65000 euros y se alcanza sembrando 150 hectáreas de patatas y 50 de zanahorias.

150 ha de patatas, 50 ha de zanahorias; $G_{\max} = 65000 \text{ €}$.
--

Problema 2 · Asíntotas y extremos

a) La función racional es

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x}.$$

El denominador se factoriza como $x(x-3)(x+3)$; por tanto, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$. El numerador no se anula en esos tres puntos. Comprobamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Por ello, $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$ son asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, los límites en ambos infinitos son el cociente de los coeficientes principales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

La asíntota horizontal es $y = 2$.

b) Para estudiar la monotonía de $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$, calculamos su derivada y localizamos los puntos críticos:

$$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(x+1)(x+2) = 0 \implies x = -2, -1, 0.$$

El signo del producto en los intervalos determinados por estos valores es

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	-	+	-	+

Así, g decrece en $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$, y crece en $(-2, -1)$ y $(0, +\infty)$.

c) El cambio de signo de la derivada da mínimos en $x = -2$ y $x = 0$, y un máximo local en $x = -1$. Sus valores son

$$g(-2) = -8, \quad g(-1) = -7, \quad g(0) = -8.$$

Asíntotas: $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 2$; mínimos $(-2, -8)$, $(0, -8)$; máximo local $(-1, -7)$.

Problema 3 · Probabilidades de lectura y cine

Sean L el suceso «ha leído algún libro» y V el suceso «ha visto alguna película». Se conocen $P(L) = 0,25$, $P(V) = 0,65$ y $P(L \cap V) = 0,10$.

a) Ver una película y no haber leído un libro corresponde a $V \cap \bar{L}$. Por tanto,

$$P(V \cap \bar{L}) = P(V) - P(L \cap V) = 0,65 - 0,10 = 0,55.$$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos se calcula mediante el complementario de la unión:

$$P(\bar{L} \cap \bar{V}) = 1 - P(L \cup V) = 1 - [P(L) + P(V) - P(L \cap V)] = 0,20.$$

c) Aplicamos la definición de probabilidad condicionada, pues se sabe que el alumno pertenece a L :

$$P(V | L) = \frac{P(L \cap V)}{P(L)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4.$$

$$P(V \cap \bar{L}) = 0,55; \quad P(\bar{L} \cap \bar{V}) = 0,20; \quad P(V | L) = 0,4.$$

Opción B

Problema 1 · Reparto de billetes

Sean x, y, z los billetes vendidos a Londres, París y Roma, respectivamente. El total y las relaciones del enunciado dan

$$x + y + z = 60, \quad y = 2(x + z), \quad z = \frac{x}{2} + 2.$$

Como $x + z = 60 - y$, las dos primeras ecuaciones implican $y = 2(60 - y)$, de donde $y = 40$ y $x + z = 20$. Sustituyendo $z = x/2 + 2$:

$$x + \frac{x}{2} + 2 = 20 \implies x = 12, \quad z = 8.$$

Londres: 12; París: 40; Roma: 8 billetes.

Problema 2 · Rendimiento durante el estudio

El rendimiento es $R(t) = \frac{700t}{4t^2 + 9}$, con $0 \leq t \leq 6$.

a) A las tres horas,

$$R(3) = \frac{700 \cdot 3}{4 \cdot 3^2 + 9} = \frac{2100}{45} = \frac{140}{3}.$$

b) La derivada permite determinar cuándo aumenta o disminuye el rendimiento:

$$R'(t) = \frac{700(9 - 4t^2)}{(4t^2 + 9)^2}.$$

El denominador es positivo. En el intervalo de estudio, el numerador se anula en $t = 3/2$, es positivo antes y negativo después. Así, R crece en $[0, 3/2]$ y decrece en $[3/2, 6]$. Por ello alcanza el máximo en $t = 3/2$:

$$R\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{700(3/2)}{4(3/2)^2 + 9} = \frac{175}{3}.$$

c) Después del máximo resolvemos $R(t) = 35$:

$$\frac{700t}{4t^2 + 9} = 35 \iff 4t^2 - 20t + 9 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \text{ o } t = \frac{9}{2}.$$

Como se pregunta por el instante posterior a alcanzar el máximo ($t = 3/2$), corresponde $t = 9/2$ horas.

$R(3) = \frac{140}{3}; \quad R_{\max} = \frac{175}{3} \text{ a las } 1,5 \text{ h}; \quad R = 35 \text{ de nuevo a las } 4,5 \text{ h.}$
--

Problema 3 · Probabilidades de dos sucesos

Se tiene $P(A) = 2/3$ y $P(\overline{B}) = 1/4$, de modo que $P(B) = 3/4$. Además, $P(A \cup B) = 19/24$.

a) Despejamos la intersección en la fórmula de la unión:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{19}{24} = \frac{5}{8}.$$

b) El suceso «no ocurre ni A ni B » es el complementario de $A \cup B$:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}.$$

c) Por probabilidad condicionada,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6}.$$

d) Para que fueran independientes debería cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pero

$$P(A)P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{8} = P(A \cap B),$$

por lo que no son independientes.

$P(A \cap B) = \frac{5}{8}; \quad P(\overline{A \cap B}) = \frac{5}{24}; \quad P(A B) = \frac{5}{6}; \quad A, B \text{ no son independientes.}$
