

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z ,

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (**1 punto**).

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, **obtener** todas sus soluciones (**1,8 puntos**).

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$ (**0,5 puntos**).

Solución:

Como es un sistema homogéneo estudiamos la matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 + C_1} \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda + 3 & -3 \\ 5 & \lambda + 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -3 \\ \lambda + 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \lambda + 3 \\ 5 & \lambda + 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda + 3) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + (\lambda + 3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda - 2 + 3) + (\lambda + 3)(3 - 5) =$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 1) - 2(\lambda + 3) = (\lambda + 3)[(\lambda + 2)(\lambda + 1) - 2] = (\lambda + 3)(\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 2) =$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda^2 + 3\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 3)\lambda = \lambda(\lambda + 3)^2$$

$$|A| = 0 \rightarrow \lambda(\lambda + 3)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ (\lambda + 3)^2 = 0 \rightarrow (\lambda + 3) = 0 \rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$ $|A| \neq 0 \rightarrow$ S.C.D., la solución es la trivial

Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -3$ $|A| = 0 \rightarrow$ S.C.I.

a) Los valores de λ para los que el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, la solución trivial, son $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$.

b)

Para $\lambda = 0$

$$\text{El sistema es } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{La matriz de coeficientes es } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ y sabemos que } |A| = 0$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 = 15 \neq 0, \text{ } \text{ran}(A) = 2$$

resolvemos el sistema usando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y . Debemos resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x - y = -z \\ 3x + 6y = 3z \end{cases}$$

Por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 3z & 6 \end{vmatrix}}{15} = \frac{-6z + 3z}{15} = \frac{-3z}{15} = \frac{-z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 3 & 3z \end{vmatrix}}{15} = \frac{6z + 3z}{15} = \frac{9z}{15} = \frac{3z}{5}$$

$$\text{Solución} \begin{cases} x = \frac{-\alpha}{5} \\ y = \frac{3\alpha}{5} \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda = -3$

$$\text{El sistema es} \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{La matriz de coeficientes es } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \text{ y sabemos que } |A| = 0$$

Como en esta matriz se cumple que $F_2 = -3 F_1$ y $F_3 = -5 F_1$ el máximo rango de A será 1, podemos calcular el siguiente menor de orden 1,

$$|-1| = -1 \neq 0 \text{ luego } \text{ran}(A) = 1$$

Para resolver el sistema utilizamos la primera ecuación y la incógnita x como principal, es decir,

$$-x - y + z = 0, \text{ por lo tanto, } x = -y + z$$

$$\text{Solución} \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

c) Para $\lambda = -3$, según hemos estudiado en el apartado anterior, la matriz de coeficientes tiene rango 1, esto quiere decir que los tres planos son el mismo.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $2x - 2y - z = 9$ y $4x - y + z = 42$.
- Y la recta s que pasa por los puntos $(1, 3, -4)$ y $(3, -5, -2)$. Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r (0,8 puntos) y de la recta s (0,3 puntos).

b) Justificar que las rectas r y s se cruzan (0,8 puntos).

c) Calcular un vector direccional de la recta t , perpendicular común a las rectas r y s , (0,4 puntos) y calcular el punto P de intersección de las rectas s y t (1 punto).

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r .

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 8 = 6 \neq 0$

usaremos como incógnitas principales x e y

$$\begin{cases} 2x - 2y = 9 + z \\ 4x - y = 42 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9+z & -2 \\ 42-z & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9-z+84-2z}{6} = \frac{75-3z}{6} = \frac{25-z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9+z \\ 4 & 42-z \end{vmatrix}}{6} = \frac{84-2z-36-4z}{6} = \frac{48-6z}{6} = 8-z$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$\begin{cases} x = \frac{25-\lambda}{2} \\ y = 8-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas de s .

$$\vec{v}_s = (3, -5, -2) - (1, 3, -4) = (2, -8, 2) \approx (1, -4, 1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - 4\mu \\ z = -4 + \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

b)

$$\vec{v}_r = \left(\frac{-1}{2}, -1, 1 \right) \quad \text{Estos vectores no tienen sus coordenadas proporcionales}$$

$$\frac{-1}{-4} \neq \frac{1}{1}$$

$$\vec{v}_s = (1, -4, 1) \quad \text{por lo que las rectas } r \text{ y } s \text{ no son paralelas.}$$

Veamos la posición relativa de estas dos rectas mediante el cálculo del siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & P_r - P_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \frac{25}{2} - 1 \\ \frac{2}{-1} & -4 & 8 - 3 \\ 1 & 1 & 0 - (-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \frac{23}{2} \\ \frac{2}{-1} & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - 4C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & \frac{25}{2} \\ \frac{2}{-1} & \frac{2}{-3} & \frac{2}{9} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & \frac{25}{2} \\ -3 & \frac{2}{9} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 25 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (27 + 75) = 51 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

c) La recta perpendicular común a r y s tiene como vector director,

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+4) - \vec{j}\left(-\frac{1}{2}-1\right) + \vec{k}(2+1) =$$

$$= 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\text{luego } \vec{v}_t = \left(3, \frac{3}{2}, 3\right) \approx \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (2, 1, 2)$$

Calculemos el punto P intersección de las rectas s y t .

Sean $P_r\left(\frac{25-\lambda}{2}, 8-\lambda, \lambda\right)$ y $P_s(1+\mu, 3-4\mu, -4+\mu)$ puntos cualesquiera de las rectas r y s , respectivamente. Por ser t la perpendicular común a r y s buscamos el punto P imponiendo la condición de que los vectores $\vec{P_r P_s}$ y $\vec{v}_t$ deben ser paralelos.

$$\vec{P_r P_s} = \left(1+\mu - \frac{25-\lambda}{2}, 3-4\mu - (8-\lambda), -4+\mu - \lambda\right)$$

$$\vec{v}_t = (2, 1, 2)$$

$$\text{luego } \frac{1+\mu - \frac{25-\lambda}{2}}{2} = \frac{3-4\mu - (8-\lambda)}{1} = \frac{-4+\mu - \lambda}{2}$$

que da lugar a siguiente sistema,

$$\begin{cases} \frac{1+\mu - \frac{25-\lambda}{2}}{2} = \frac{-4+\mu - \lambda}{2} \\ \frac{3-4\mu - (8-\lambda)}{1} = \frac{-4+\mu - \lambda}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+2\mu - 25 + \lambda = -8 + 2\mu - 2\lambda \\ -8\mu - \mu + 2\lambda + \lambda = -4 - 6 + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu - 2\mu + \lambda + 2\lambda = -8 - 2 + 25 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 15 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases}$$

$$\text{de } 1^{\text{a}} \rightarrow \lambda = \frac{15}{3} = 5$$

$$\text{en } 2^{\text{a}} \rightarrow -9\mu + 3 \cdot 5 = 6$$

$$-9\mu + 15 = 6$$

$$-9\mu = 6 - 15$$

$$-9\mu = -9$$

$$\mu = \frac{-9}{-9} = 1$$

El punto de la recta s buscado será: $(1 + 1, 3 - 4 \cdot 1, -4 + 1) = (2, -1, -3)$

Luego $P(2, -1, -3)$

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:

a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto)**.

b) Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto)**.

c) Obtener el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$ **(1,3 puntos)**.

Solución:

a) *Máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$*

Como $f(x)$ es una función polinómica, es una función continua. El máximo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado se alcanza en un extremo local de la función o en los extremos del intervalo.

Calculemos los extremos locales de la función,

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0; \quad 3x^2 = 3; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \quad \text{luego en } x = -1 \text{ hay un máximo local.}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \quad \text{luego en } x = 1 \text{ hay un mínimo local.}$$

Como -1 pertenece al intervalo $[-3, 0]$ $f(x)$ alcanza un máximo local en este intervalo.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 8 = -1 + 3 + 8 = 10$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 8 = -27 + 9 + 8 = -10$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 8 = 8$$

Luego $f(x)$ alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[-3, 0]$ en el punto $(-1, 10)$

b) *Corte entre $f(x)$ y $g(x)$*

$$x^3 - 3x + 8 = -3x$$

$$x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

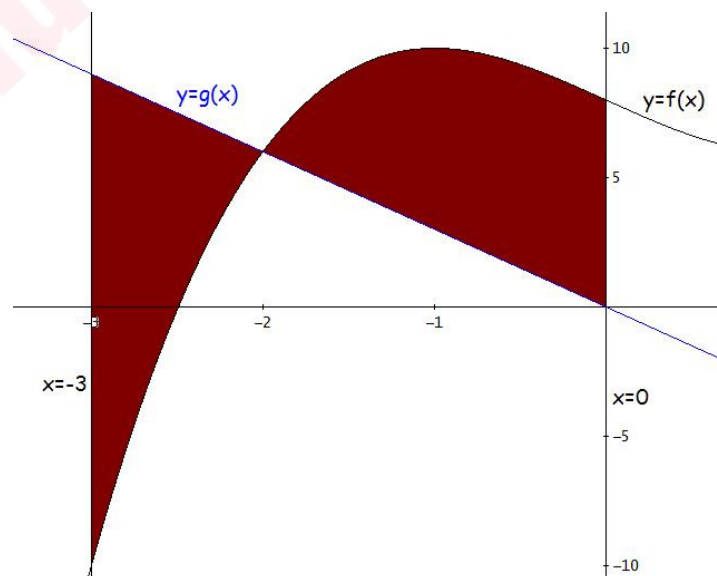
$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\text{Para } x = -2, \quad g(-2) = -3(-2) = 6$$

El punto de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ es $(-2, 6)$.

c) *Área limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -3$, $x = 0$*

De los cálculos de los apartados anteriores podemos realizar una representación gráfica de las funciones que limitan el área a calcular,



Calculamos este área de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} [(-3x) - (x^3 - 3x + 8)] dx + \int_{-2}^0 [(x^3 - 3x + 8) - (-3x)] dx = \int_{-3}^{-2} [-3x - x^3 + 3x - 8] dx + \int_{-2}^0 [x^3 - 3x + 8 + 3x] dx = \\
&= \int_{-3}^{-2} [-x^3 - 8] dx + \int_{-2}^0 [x^3 + 8] dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^0 = \\
&= \left(\frac{-(-2)^4}{4} - 8(-2) \right) - \left(\frac{-(-3)^4}{4} - 8(-3) \right) + \left(\frac{0^4}{4} + 8 \cdot 0 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} + 8(-2) \right) = \\
&= \left(\frac{-16}{4} + 16 \right) - \left(\frac{-81}{4} + 24 \right) + 0 - \left(\frac{16}{4} - 16 \right) = \frac{-16 + 64}{4} - \frac{-81 + 96}{4} - \frac{16 - 64}{4} = \frac{48}{4} - \frac{15}{4} - \frac{-48}{4} = \\
&= \frac{48 - 15 + 48}{4} = \frac{81}{4} = 20'25
\end{aligned}$$

El área pedida mide 20'25 u. a.

Tu Profecía al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de $1,8 \text{ m/min}$.

a) Obtener el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio **(1,3 puntos)**.

b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance 45 m **(2 puntos)**.

Solución:

a) Área quemada en función del tiempo.

Como el radio crece a $1,8 \text{ m/min}$, $r = 1,8 t$ (t en minutos)

El área del círculo quemado será: $A = \pi (1,8 t)^2 = 3,24 \pi t^2$ (A en m^2 y t en minutos)

b) El radio alcanza un valor de 45 m

$$45 = 1,8 t \rightarrow t = \frac{45}{1,8} = 25$$

al cabo de 25 min .

La velocidad de crecimiento del área viene dada por $A' = 2 \cdot 3,24 \pi t = 6,48 \pi t$

Luego para $t = 25$, $A' = 6,48 \pi 25 = 162 \pi \approx 508,938$

Por lo que la velocidad de crecimiento en el instante en que el radio alcance 45 m será de $162 \pi \text{ m}^2/\text{min}$, aproximadamente, $509 \text{ m}^2/\text{min}$.

Tu Prof te al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. A es una matriz 3×3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Se pide:

- a) Calcular el determinante de la matriz A^3 (0,5 puntos) y la matriz inversa de A^3 (1 punto).
 b) Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$ (1,3 puntos).
 c) Calcular la matriz inversa de A (0,5 puntos).

Solución:

a)

$$|A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 8 + 4 = -1 \neq 0 \quad \text{luego} \quad \exists (A^3)^{-1}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego} \quad (A^3)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz fila X que cumpla $XA^3 = BA^2$

Por el apartado anterior sabemos que $\exists (A^3)^{-1}$, multiplicando la ecuación anterior por $(A^3)^{-1}$ por la izquierda:

$$XA^3 (A^3)^{-1} = BA^2 (A^3)^{-1}$$

$$XI = BA^2 (A^3)^{-1}$$

$$X = BA^2 (A^3)^{-1}$$

Por lo que el cálculo de la matriz X será,

$$X = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1.2 + 2(-1) + 3(-1) & 1.1 + 2.0 + 3(-1) & 1.0 + 2.(-1) + 3.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -3(-3) - 2.6 + 4.2 & -3(-4) - 2.7 + 4.2 & -3(-2) - 2.4 + 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solución $X = (5, 6, 2)$

c) Calcular A^{-1}

Conocemos A^2, A^3 y $(A^3)^{-1}$

Empezamos con $A^3 = A A^2$

multiplicando por $(A^3)^{-1}$ por la derecha

$$A^3 (A^3)^{-1} = A A^2 (A^3)^{-1}$$

$$I = A A^2 (A^3)^{-1}$$

multiplicando por A^{-1} por la izquierda

$$A^{-1} I = A^{-1} A A^2 (A^3)^{-1}$$

$$A^{-1} = I A^2 (A^3)^{-1} \rightarrow A^{-1} = A^2 (A^3)^{-1}$$

Luego

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + 1.6 + 0.2 & 2(-4) + 1.7 + 0.2 & 2(-2) + 1.4 + 0.1 \\ -1(-3) + 0.6 - 1.2 & -1(-4) + 0.7 - 1.2 & -1(-2) + 0.4 - 1.1 \\ -1(-3) - 1.6 + 2.2 & -1(-4) - 1.7 + 2.2 & -1(-2) - 1.4 + 2.1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- El plano π que pasa por los puntos $(11, 1, 2)$, $(5, 7, 5)$ y $(7, -1, -2)$.
 - Y la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$.
- a) Calcular la ecuación paramétrica de r (0,6 puntos) y la ecuación implícita del plano π (0,4 puntos).
 b) Calcular el punto P intersección de r y π (0,8 puntos) y el ángulo α que determinan r y π (0,5 puntos).
 c) Calcular los puntos M y N de la recta r cuya distancia al plano π es igual a 3 u.l. (1 punto).

Solución:

a) Ecuación paramétrica de r

$$r: \begin{cases} x + y + z = 15 \\ 2x - 7y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 2 = -9 \neq 0$$

resolvemos el sistema de la recta r usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x + y = 15 - z \\ 2x - 7y = 3 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 - z & 1 \\ 3 - 2z & -7 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-105 + 7z - 3 + 2z}{-9} = \frac{-108 + 9z}{-9} = 12 - z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 - z \\ 2 & 3 - 2z \end{vmatrix}}{-9} = \frac{3 - 2z - 30 + 2z}{-9} = \frac{-27}{-9} = 3$$

La ecuación paramétrica de la recta r será: $r: \begin{cases} x = 12 - \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación implícita del plano π

Punto $(11, 1, 2)$

Vectores directores: $\vec{v} = (11, 1, 2) - (5, 7, 5) = (6, -6, -3) \approx (2, -2, -1)$
 $\vec{w} = (11, 1, 2) - (7, -1, -2) = (4, 2, 4) \approx (2, 1, 2)$

La ecuación implícita del plano π será,

$$\begin{vmatrix} x - 11 & y - 1 & z - 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 11) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y - 1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z - 2) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 11)(-4 + 1) - (y - 1)(4 + 2) + (z - 2)(2 + 4) = 0$$

$$(x - 11)(-3) - (y - 1)6 + (z - 2)6 = 0$$

$$-3x + 33 - 6y + 6 + 6z - 12 = 0$$

$$-3x - 6y + 6z + 27 = 0$$

simplificando por -3

$x + 2y - 2z - 9 = 0$ es la ecuación del plano π .

b) P , punto de intersección de r y π

Sustituimos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r en la ecuación del plano π

$$(12 - \lambda, 3, \lambda) \in r$$

$$12 - \lambda + 2 \cdot 3 - 2\lambda - 9 = 0$$

$$12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9 = 0$$

$$9 - 3\lambda = 0$$

$$-3\lambda = -9 \rightarrow \lambda = \frac{-9}{-3} = 3$$

Por lo que el punto P será: $(12 - 3, 3, 3) = (9, 3, 3)$

Ángulo α que determinan r y π .

de r $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$

de π el vector ortogonal $\vec{u} = (1, 2, -2)$

Sea $\alpha = \angle(r, \pi)$

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(-1, 0, 1) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1 - 2|}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rds}$

c)

$$\exists M, N \in r? \quad / \quad d(M, \pi) = d(N, \pi) = 3$$

$$\pi: x + 2y - 2z - 9 = 0$$

Sea $P \in r \rightarrow P = (12 - \lambda, 3, \lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|12 - \lambda + 2 \cdot 3 - 2\lambda - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|9 - 3\lambda|}{3}$$

$$\frac{|9 - 3\lambda|}{3} = 3 \rightarrow |9 - 3\lambda| = 9 \rightarrow \begin{cases} 9 - 3\lambda = 9 \rightarrow -3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 9 - 3\lambda = -9 \rightarrow -3\lambda = -18 \rightarrow \lambda = 6 \end{cases}$$

Para $\lambda = 0 \rightarrow M(12, 3, 0)$

$\lambda = 6 \rightarrow N(6, 3, 6)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.

a) **Obtener** la derivada de la función $f(x) = ax + b + \operatorname{sen} x$ **(0,5 puntos)**. **Calcular** a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + \operatorname{sen} x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX **(1,8 puntos)**.

b) **Justificar** que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \operatorname{sen} x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$ **(0,5 puntos)**.

c) **Calcular** esos dos puntos **(0,5 puntos)**.

Solución:

a) $f'(x) = a + \cos x$

Calculo de a y b con las condiciones dadas

$(0, 0)$ es punto de la curva $\rightarrow 0 = a \cdot 0 + b + \operatorname{sen} 0 \rightarrow 0 = b + 0 \rightarrow b = 0$

la recta tangente a la curva en $(0, 0)$ es el eje $OX \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow a + \cos 0 = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

Por lo tanto, $a = -1$ y $b = 0$

b)

$g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \operatorname{sen} x$ Intentaremos aplicar el Teorema de Bolzano. Debemos buscar intervalos en que la función

$g(x)$ tome valores de distinto signo en los extremos.

$$g(0) = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 + \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1 + 1 = 0$$

Ya hemos encontrado dos puntos del intervalo $[0, \pi]$ en los que se anula $g(x)$.

c) Los puntos del intervalo $[0, \pi]$ en los que se anula $g(x)$ son $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.

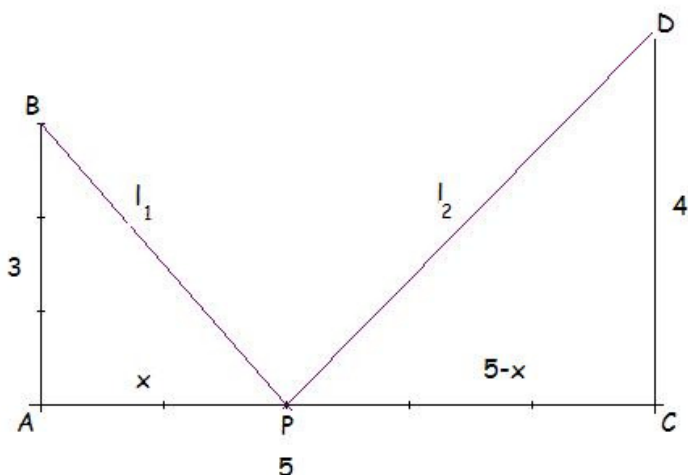
Dos postes de 3 m y 4 m se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 m y, en el segmento que las une, hay un punto P que dista x metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:

a) **Obtener** la expresión $f(x)$ de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos (**1,8 puntos**).

b) **Demostrar** que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados (**1 punto**). **Calcular** esa longitud mínima (**0,5 puntos**).

Solución:

Gráficamente el problema es,



a) $f(x)$ = longitud el cable.

En el triángulo rectángulo PAB, $l_1 = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$

En el triángulo rectángulo PCD, $l_2 = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} = \sqrt{16 + (5-x)^2}$

La longitud del cable será: $f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{16 + (5-x)^2}$

b) Llamamos m_1 a la pendiente del cable l_1 y m_2 a la pendiente del cable l_2

$$|m_1| = \left| \frac{3}{-x} \right| = \frac{3}{x} \quad \text{ya que } x > 0$$

$$|m_2| = \left| \frac{4}{5-x} \right| = \frac{4}{5-x} \quad \text{ya que } 5-x > 0$$

Veamos cuando son iguales estos valores absolutos de las pendientes,

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{5-x}$$

$$15 - 3x = 4x$$

$$15 = 4x + 3x$$

$$15 = 7x$$

$$x = \frac{15}{7}$$

Calculemos el mínimo de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} + \frac{-2(5-x)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}} = 0$$

$$(*) \quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} = \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

elevando al cuadrado,

$$\frac{x^2}{9+x^2} = \frac{(5-x)^2}{16+(5-x)^2}$$

$$x^2[16+(5-x)^2] = (9+x^2)(5-x)^2$$

$$16x^2 + x^2(5-x)^2 = 9(5-x)^2 + x^2(5-x)^2$$

$$16x^2 = 9(5-x)^2$$

$$16x^2 = 9(25-10x+x^2)$$

$$16x^2 = 225 - 90x + 9x^2$$

$$7x^2 + 90x - 225 = 0$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{90^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-225)}}{2 \cdot 7} = \frac{-90 \pm \sqrt{14400}}{14} = \frac{-90 \pm 120}{14} = \begin{cases} \frac{-90+120}{14} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7} \\ \frac{-90-120}{14} = \frac{-210}{14} = -15 \end{cases}$$

debemos comprobar si son soluciones de la ecuación inicial (*)

$$x = -15$$

$$\frac{-15}{\sqrt{9+(-15)^2}} = \frac{5-(-15)}{\sqrt{16+(5-(-15))^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}} = \frac{20}{\sqrt{16+20^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}} = \frac{20}{\sqrt{416}}$$

evidentemente un número negativo no puede ser igual a uno positivo, luego $x = -15$ no es solución

$$x = \frac{15}{7}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2}} = \frac{5-\frac{15}{7}}{\sqrt{16+\left(5-\frac{15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}} = \frac{\frac{35-15}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{35-15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}} = \frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{20}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}} = \frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\frac{400}{49}}}$$

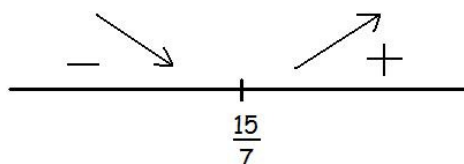
$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{\frac{666}{49}}} = \frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{\frac{1184}{49}}} \rightarrow \frac{\frac{15}{7}}{\frac{\sqrt{666}}{7}} = \frac{\frac{20}{7}}{\frac{\sqrt{1184}}{7}} \rightarrow \frac{15}{\sqrt{666}} = \frac{20}{\sqrt{1184}} \rightarrow \frac{15}{3\sqrt{74}} = \frac{20}{4\sqrt{74}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{74}} = \frac{5}{\sqrt{74}}$$

luego $x = \frac{15}{7}$ es solución

Para determinar si $x = \frac{15}{7}$ es mínimo o máximo relativo, estudiamos el signo de $f'(x)$ alrededor de él

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

x	$f'(x)$
0	$\frac{0}{\sqrt{9+0^2}} - \frac{(5-0)}{\sqrt{16+(5-0)^2}} = -\frac{5}{\sqrt{16+25}} < 0$
5	$\frac{5}{\sqrt{9+5^2}} - \frac{(5-5)}{\sqrt{16+(5-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{9+25}} > 0$



Por lo tanto en $x = \frac{15}{7}$ hay un mínimo relativo.

Hemos demostrado que longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados