

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria coincidente de 2025

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Álgebra

1.1 a) Discusión según λ

La matriz de coeficientes y la ampliada del sistema son

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_{\lambda}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & \lambda & 11 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de A_{λ} para localizar los posibles casos singulares:

$$\det(A_{\lambda}) = -2(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Si $\lambda \neq 2, -2$, el determinante no se anula, así que $\text{rang}(A_{\lambda}) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3 y, por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 2$, la tercera fila de A_2 es la suma de las dos primeras, y lo mismo ocurre con los términos independientes, pues $11 = 2 + 9$. El menor de las dos primeras filas y columnas de coeficientes vale

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Así, $\text{rang}(A_2) = \text{rang}(A_2^*) = 2 < 3$; por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible indeterminado.

Para $\lambda = -2$, el mismo menor de coeficientes vale

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

por lo que $\text{rang}(A_{-2}) = 2$. En la ampliada, el menor formado por las columnas de x , y y los términos independientes es

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 9 \\ 5 & -3 & 11 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rang}(A_{-2}^*) = 3 > \text{rang}(A_{-2})$, y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $\lambda \neq \pm 2$, SCI si $\lambda = 2$ y SI si $\lambda = -2$.

1.1 b) Resolución para $\lambda = 2$

Al sustituir $\lambda = 2$, las ecuaciones quedan

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 3x - 2y - z = 9, \\ 5x - 3y + 2z = 11. \end{cases}$$

La tercera ecuación es la suma de las dos primeras, así que basta resolver las dos primeras y dejar una incógnita libre. Tomamos $z = t$. De la primera ecuación,

$$y = 2x + 3t - 2.$$

Al sustituir en la segunda,

$$3x - 2(2x + 3t - 2) - t = 9 \implies -x - 7t = 5 \implies x = -5 - 7t.$$

Entonces $y = -12 - 11t$. **Conclusión.** Las soluciones son $(x, y, z) = (-5 - 7t, -12 - 11t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

1.2 a) Matrices diagonales D con DA estocástica

Sea $D = \text{diag}(x, y, z)$. Para que DA sea estocástica, sus entradas han de ser no negativas y cada columna debe sumar 1. Multiplicar por D escala las filas de A , así que las sumas de las columnas de DA son

$$\frac{x+y+z}{3}, \quad \frac{y+z}{2}, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4}.$$

Igualarlas a 1 da

$$x+y+z=3, \quad y+z=2, \quad 2x+y+z=4.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x=1$; la tercera queda entonces satisfecha. Como los elementos de A son no negativos, las entradas de DA serán no negativas exactamente cuando $x, y, z \geq 0$. Por tanto, podemos escribir $y=t, z=2-t$ con $0 \leq t \leq 2$. **Conclusión.** Todas las matrices buscadas son $D = \text{diag}(1, t, 2-t)$, con $0 \leq t \leq 2$.

1.2 b) Matriz diagonal D con BD estocástica

Sea $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$. Al multiplicar B por la derecha, cada columna j de B queda multiplicada por d_j . Como B es estocástica, cada una de sus columnas suma 1; por ello, la columna j de BD suma d_j . Para que BD siga siendo estocástica debe cumplirse

$$d_1 = d_2 = d_3 = 1,$$

es decir, $D = I$. **Conclusión.** No existe una matriz diagonal distinta de la identidad que haga que BD sea estocástica.

Pregunta 2 - Análisis

2.1 a) Dominio y paridad

Para que $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$ esté definida, el radicando debe ser no negativo:

$$x^2+3x = x(x+3) \geq 0.$$

El producto es no negativo si $x \leq -3$ o $x \geq 0$, de modo que

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty).$$

Para ser par o impar, el dominio debe ser simétrico respecto del origen. No lo es: por ejemplo, 1 pertenece al dominio, pero -1 no. **Conclusión.** f no es par ni impar.

2.1 b) Límites cuando $x \rightarrow -\infty$

Cuando $x < 0$, se tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Por ello,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = -\sqrt{1+\frac{3}{x}} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Para el segundo límite, racionalizamos la expresión:

$$f(x) + x = \sqrt{x^2+3x} + x = \frac{(x^2+3x) - x^2}{\sqrt{x^2+3x} - x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} - x}.$$

Como $x < 0$, tenemos $\sqrt{x^2+3x} = -x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$. Sustituyendo esta expresión en el denominador,

$$f(x) + x = \frac{3x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}} - x} = -\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1}.$$

Ahora el límite se obtiene por sustitución:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -\frac{3}{1+1} = -\frac{3}{2}.$$

Conclusión. Los límites son $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -\frac{3}{2}$.

2.1 c) Recta tangente en $x = 1$

La función es derivable en $x = 1$ porque el radicando vale $4 > 0$. La pendiente de la tangente es $f'(1)$, donde

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}.$$

Así, $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{5}{4}$. Con la fórmula punto-pendiente de la recta,

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \implies y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1).$$

Conclusión. La recta tangente es $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$.

2.2) Primitiva con condición inicial

Dividimos el numerador por el denominador para simplificar la función:

$$\frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} = x - 1 - \frac{9(x - 1)}{x^2 + 9}.$$

Integramos cada término. En la fracción aparecen las derivadas de $x^2 + 9$ y la forma de la integral de $\frac{1}{x^2 + 9}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

La condición $F(0) = \ln 3$ determina la constante:

$$-\frac{9}{2} \ln 9 + C = \ln 3 \implies C = 10 \ln 3.$$

También podemos agrupar los logaritmos como $\ln((x^2 + 9)/9)$, lo que deja la expresión más compacta:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln\left(\frac{x^2 + 9}{9}\right) + 3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \ln 3.$$

Conclusión. La primitiva que cumple $F(0) = \ln 3$ es la función anterior.

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

3.1 a) Extremos medios y cosenos de los ángulos

Los extremos de la viga añadida son los puntos medios de V_1 y V_2 . Si los extremos de un segmento son P y Q , su punto medio es $(P + Q)/2$. Así,

$$M_1 = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) = (1, 4, -1),$$

$$M_2 = \frac{C + D}{2} = \left(\frac{-2+10}{2}, \frac{-8-4}{2}, \frac{7+7}{2} \right) = (4, -6, 7).$$

El vector director de la viga nueva, orientado de M_1 a M_2 , es

$$\vec{w} = M_2 - M_1 = (4 - 1, -6 - 4, 7 - (-1)) = (3, -10, 8).$$

Los vectores directores de las vigas existentes se obtienen restando sus extremos:

$$\vec{v}_1 = B - A = (1 - 1, 6 - 2, 1 - (-3)) = (0, 4, 4), \quad \vec{v}_2 = D - C = (10 - (-2), -4 - (-8), 7 - 7) = (12, 4, 0).$$

Para dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$, el coseno del ángulo entre ellos es $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. Calculamos

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{173}, \quad \|\vec{v}_1\| = 4\sqrt{2}, \quad \|\vec{v}_2\| = 4\sqrt{10},$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v}_1 = -8, \quad \vec{w} \cdot \vec{v}_2 = -4.$$

Con los sentidos elegidos para los vectores, los cosenos dirigidos son

$$\cos \theta_1 = -\frac{2}{\sqrt{346}}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{1730}}.$$

Al hablar del ángulo entre las vigas sin fijar orientación se toma el ángulo agudo entre sus direcciones; sus cosenos son los valores absolutos de los anteriores. **Conclusión.** Los extremos de la viga son $M_1 = (1, 4, -1)$ y $M_2 = (4, -6, 7)$. Los cosenos de los ángulos agudos con V_1 y V_2 son $\frac{2}{\sqrt{346}}$ y $\frac{1}{\sqrt{1730}}$, respectivamente.

3.1 b) Viga perpendicular a ambas vigas

Buscamos un punto P en V_1 y un punto Q en V_2 tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a los dos vectores directores. Parametrizamos los segmentos con parámetros entre 0 y 1:

$$P(s) = A + s(B - A) = (1, 2 + 4s, -3 + 4s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$Q(t) = C + t(D - C) = (-2 + 12t, -8 + 4t, 7), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces

$$\overrightarrow{PQ} = Q(t) - P(s) = (-3 + 12t, -10 + 4t - 4s, 10 - 4s).$$

Imponemos las dos condiciones de perpendicularidad, usando $\vec{v}_1 = (0, 4, 4)$ y $\vec{v}_2 = (12, 4, 0)$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 16t - 32s = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 160t - 16s - 76 = 0.$$

De la primera ecuación, $t = 2s$. Al sustituir en la segunda:

$$304s - 76 = 0 \implies s = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{2}.$$

Ambos parámetros están en $[0, 1]$, así que los puntos pertenecen a las vigas. Sus coordenadas son

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = (1, 3, -2), \quad Q\left(\frac{1}{2}\right) = (4, -6, 7).$$

Comprobamos el vector de la viga añadida:

$$\overrightarrow{PQ} = (3, -9, 9), \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

Conclusión. La viga perpendicular puede unir $P = (1, 3, -2)$ de V_1 con $Q = (4, -6, 7)$ de V_2 .

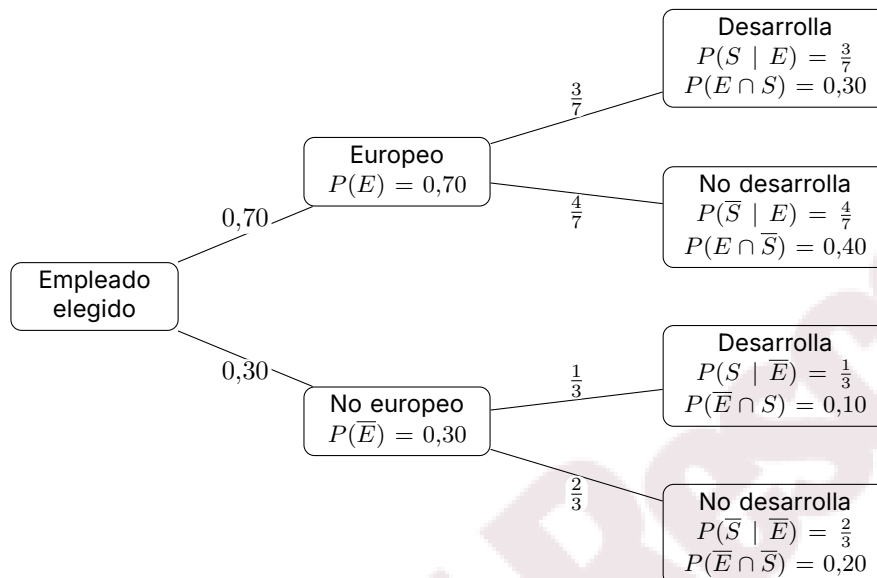
Pregunta 4 - Probabilidad

4.1 a) Empleado europeo que no desarrolla software

Sean E el suceso «el empleado es europeo» y S el suceso «trabaja en desarrollo de software». Del enunciado,

$$P(E) = 0,70, \quad P(\bar{E}) = 0,30, \quad P(S | E) = \frac{3}{7}, \quad P(S | \bar{E}) = \frac{1}{3}.$$

En un camino del árbol multiplicamos la probabilidad de pertenecer al grupo por la probabilidad condicionada de su rama; las hojas recogen las probabilidades conjuntas.



La probabilidad pedida corresponde a la hoja «europeo y no desarrolla»:

$$P(E \cap \bar{S}) = P(E)P(\bar{S} | E) = 0,70 \cdot \frac{4}{7} = 0,40.$$

Conclusión. La probabilidad es 0,40, es decir, el 40 %.

4.1 b) Como máximo dos desarrolladores entre diez empleados

Primero calculamos la probabilidad de que un empleado elegido al azar desarrolle software. Los dos grupos de empleados son incompatibles, por lo que sumamos sus probabilidades conjuntas:

$$P(S) = P(E)P(S | E) + P(\bar{E})P(S | \bar{E}) = 0,70 \cdot \frac{3}{7} + 0,30 \cdot \frac{1}{3} = 0,30 + 0,10 = 0,40.$$

Sea X el número de desarrolladores entre los diez empleados. Modelamos las diez elecciones con una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0,40$:

$$X \sim \text{Bin}(10, 0,40).$$

«Como mucho dos» significa $X \leq 2$. Usamos la fórmula binomial y sumamos los casos de cero, uno o dos desarrolladores:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} (0,40)^k (0,60)^{10-k} \\ &= (0,60)^{10} + 10(0,40)(0,60)^9 + 45(0,40)^2(0,60)^8 \\ &\approx 0,1673. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que como máximo dos de los diez empleados desarrollen software es aproximadamente 0,1673.

4.2 a) Independencia de los sucesos complementarios

Del enunciado, $P(A) = 0,7$, $P(\bar{B}) = 0,2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1$. En particular,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,3.$$

Dos sucesos son independientes si la probabilidad de su intersección es el producto de sus probabilidades. Comparamos:

$$P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06 \neq 0,1 = P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Conclusión. $\bar{A}$ y $\bar{B}$ no son independientes.

4.2 b) Cálculo de $P(A \cap \overline{B})$

El suceso $\overline{B}$ se descompone en los casos incompatibles $A \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$. Por tanto,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2 - 0,1 = 0,1.$$

Conclusión. $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$.

4.2 c) Probabilidad condicionada $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

La probabilidad condicionada mide la proporción de casos de $\overline{B}$ que también pertenecen a $\overline{A}$. Aplicamos su fórmula:

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

Conclusión. $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0,5$.