

Modelo de prueba de 2026

Resolución de los seis ejercicios del modelo, incluidos todos los apartados optativos.

Ejercicio 1

El nivel a las 12 horas del 10 de abril corresponde a $t = 9.5$ días desde las 0 horas del 1 de abril. La función, definida en $[0, 30]$, es polinómica, así que su dominio incluye todo el mes. Sustituimos:

$$c(9.5) = 80 - 6(9.5) + \frac{23(9.5)^2}{20} - \frac{(9.5)^3}{30} = \boxed{\frac{2357}{24} \approx 98.21 \text{ mg/m}^3}.$$

Para hallar el máximo absoluto, calculamos los puntos críticos:

$$c'(t) = -6 + \frac{23}{10}t - \frac{1}{10}t^2 = -\frac{(t-3)(t-20)}{10}.$$

La derivada es negativa en $(0, 3)$, positiva en $(3, 20)$ y negativa en $(20, 30)$. Comparamos los extremos del dominio y los puntos críticos:

$$c(0) = 80, \quad c(3) = \frac{1429}{20}, \quad c(20) = \frac{460}{3}, \quad c(30) = 35.$$

El máximo se alcanza en $t = 20$, es decir, a las 0 horas del 21 de abril, y su nivel es $\boxed{\frac{460}{3} \approx 153.33 \text{ mg/m}^3}$.

El nivel promedio se obtiene dividiendo la integral del nivel por los 30 días:

$$\bar{c} = \frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt = \frac{1}{30} \left[80t - 3t^2 + \frac{23}{60}t^3 - \frac{t^4}{120} \right]_0^{30} = \boxed{110 \text{ mg/m}^3}.$$

Ejercicio 2

Parametrizamos las rectas:

$$r : (x, y, z) = (t, 2 - t, k + 2t), \quad s : (x, y, z) = (-2 - u, -3 + 2u, 1 + u).$$

Al igualar las coordenadas x, y , resulta $t = -9$ y $u = 7$. La igualdad de coordenadas z exige $k - 18 = 8$, luego $\boxed{k = 26}$. El punto de corte es $\boxed{(-9, 11, 8)}$.

Para $k = 0$, r pasa por $P = (0, 2, 0)$. Un plano que contiene a r y es paralelo a s tiene como direcciones $(1, -1, 2)$ y $(-1, 2, 1)$; su normal es el producto vectorial $(-5, -3, 1)$. Por tanto, el plano es

$$\boxed{-5x - 3y + z + 6 = 0}.$$

Ejercicio 3.1

Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ b(a + 1) & 3b + 1 \end{pmatrix}.$$

Al imponer $A^2 = 4I$, la entrada superior derecha da $a = -1$ y la inferior derecha da $b = 1$; las otras dos entradas también quedan igualadas. Luego $\boxed{a = -1, b = 1}$.

Con esos valores $A^2 = 4I$, así que la ecuación $A^2X = B^t$ se convierte en $4X = B^t$. De ahí,

$$\boxed{X = \frac{1}{4}B^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}.$$

Ejercicio 3.2

El sistema es homogéneo con matriz $A - mI$. Para que sea compatible indeterminado, esta matriz debe ser singular. Calculamos

$$\det(A - mI) = -m(m - 2)^2.$$

Así, los únicos valores son $m = 0$ y $m = 2$. En ambos casos la matriz tiene rango 2 (por ejemplo, sus dos primeras filas son independientes), menor que el número de incógnitas; por Rouché-Frobenius, el sistema homogéneo es SCI.

Para $m = 2$, $(A - 2I)(x, y, z)^t = 0$ equivale a

$$3x - 2y - 3z = 0, \quad 2x - 2y - 2z = 0, \quad 3x - 2y - 3z = 0.$$

De la segunda ecuación, $x = y + z$; al sustituir en la primera, $y = 0$ y $x = z$. Por tanto,

$$(x, y, z) = t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4.1

En $(0, \pi)$ el denominador es positivo y la integral es impropia en el extremo π . Usamos $u = 1 + \cos x$, $du = -\sin x \, dx$:

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = - \int_2^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{2}.$$

La integral converge. Además, $\sin x$ es impar y $\sqrt{1 + \cos x}$ es par; por tanto, f es impar. Al integrar en el intervalo simétrico $(-\pi, \pi)$, las áreas con signo se cancelan:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Ejercicio 4.2

Sea X el peso en gramos.

a) Si $X \sim N(200, \sigma)$ y $P(X > 230) = 0.33$, entonces $P(Z \leq z) = 0.67$. La tabla da $z \approx 0.44$, luego

$$\sigma = \frac{230 - 200}{0.44} \approx \boxed{68.18 \text{ g}}.$$

b) Para $X \sim N(200, 50)$,

$$P(160 < X < 220) = P(-0.8 < Z < 0.4) = 0.6554 - 0.2119 = \boxed{0.4435 = 44.35\%}.$$