

OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = (-2 \ -2)$.

a) Justifica cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B + 2CA$ (1 punto)a.2) $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC . (2 puntos)a.3) CAB (2 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T,$$

siendo C^T la matriz traspuestas de C . (5 puntos)*Solución:*

a) Para sumar o restar dos matrices, ambas deben ser del mismo orden. Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

a.1) $B + 2CA$ $C \cdot A$, el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 1×2 {filas de C x columnas de A } $B + 2CA$, la operación no puede efectuarse.a.2) $A - (BC)^T$ $B \cdot C$, el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 2×2 {filas de B x columnas de C } $BC \rightarrow (BC)^T$; $A - (BC)^T$, la operación puede efectuarse.

$$BC = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow (BC)^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A - (BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A - (BC)^T = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

a.3) CAB $C \cdot A \cdot B$, el producto CA se puede efectuar y el resultado es una matriz 1×2 . $CA \cdot B$, este producto puede realizarse y el resultado es una matriz 1×1 . Por tanto, la operación CAB puede efectuarse.

$$CAB = (-2 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \left[(-2 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-16 \ -8) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = (16)$$

$$\text{Solución: } CAB = (16)$$

b) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T; \quad B + AX = 5C^T; \quad AX = 5C^T - B$$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Multiplicando la expresión $AX = 5C^T - B$ por A^{-1} por la izquierda,
 $A^{-1}AX = A^{-1}(5C^T - B) \rightarrow IX = A^{-1}(5C^T - B) \rightarrow X = A^{-1}(5C^T - B)$

Cálculo de A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix}$$

Continuemos con el cálculo de X ,

$$5C^T - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(5C^T - B) = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

- a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. (8 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? (2 puntos)

Solución:

Llamando: x = kilos de la mezcla 1, (mezcla a partes iguales)
 y = kilos de la mezcla 1, (mezcla 1 a 3)

En la mezcla 1, los dos tipos de café van a partes iguales; luego en x kilos de esta mezcla hay $x/2$ de café colombiano y $x/2$ de café brasileño.

En la mezcla 2, la proporción es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño; luego en y kilos de esta mezcla hay $y/4$ de café colombiano y $3y/4$ de café brasileño.

Resumiendo:

	Café		euros/Kg
	colombiano	brasileño	
Mezcla 1	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	15
Mezcla 2	$\frac{y}{4}$	$\frac{3y}{4}$	10

Las restricciones serán:

$$\text{“El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano”} \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 100; \quad \frac{2x+y}{4} \leq 100; \quad 2x+y \leq 400$$

$$\text{“El vendedor dispone de 210 kilos de café brasileño”} \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 210 \rightarrow 2x+3y \leq 840$$

Como x e y representan kilos de producto, x e y deben ser mayores o iguales que 0.

Los ingresos que obtiene el vendedor son: $z = 15x + 10y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 15x + 10y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x + y \leq 400 \\ 2x + 3y \leq 840 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$2x + y \leq 400$$

$$2x + y = 400$$

x	y
0	400
200	0

¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 400 \quad \text{Si}$$

$$2x + 3y \leq 840$$

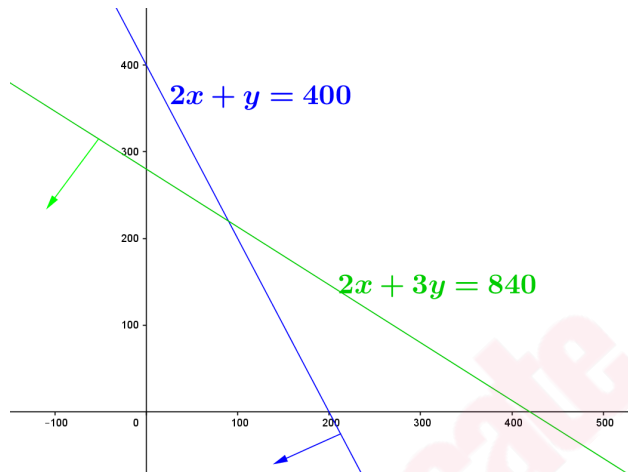
$$3x + 4y = 2100$$

x	y
0	280
420	0

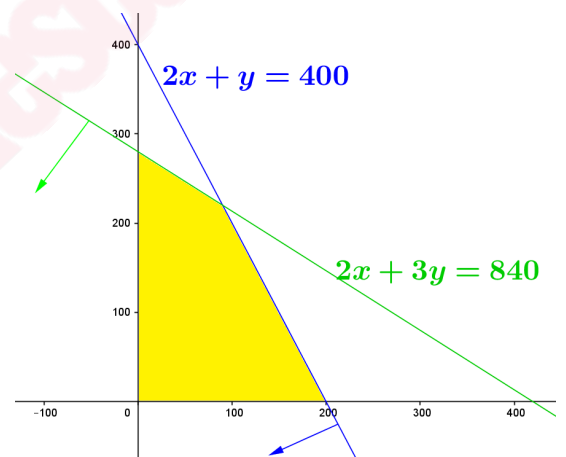
¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 840 \quad \text{Si}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

(0, 0); los de los ejes los obtuvimos en los cálculos para la representación: (200, 0) y (0, 280).

Falta el punto de corte entre las dos rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 2x + 3y = 840 \end{cases}$$

$$\text{Restando ambas ecuaciones: } -2y = -440 \rightarrow y = \frac{-440}{-2} = 220$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,

$$2x + 220 = 400; \quad 2x = 400 - 220; \quad 2x = 180; \quad x = \frac{180}{2} = 90$$

Luego punto de corte (90, 220)

Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0, 280), (90, 220) y (200, 0).

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 15x + 10y$	
0, 0	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$	
0, 280	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 280 = 2800$	
90, 220	$15 \cdot 90 + 10 \cdot 220 = 3550$	máximo
200, 0	$15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000$	

El máximo se alcanza en el punto (900 , 220)

Por tanto,

- a) **Para obtener el ingreso máximo debe producir 90 kg de la primera mezcla y 220 kg de la segunda.**
- b) **El ingreso máximo sería de 3550€.**

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1'62 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0'62 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4}{0^2 - 0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4 \rightarrow (0, 4)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = 0; \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{4+8}{6} = 2 & (2, 0) \\ x_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3} & \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 4)$, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

, la asíntota horizontal es $y = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} =$$

sustituir el valor de x en cada límite sería un cálculo largo y engorroso.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} =$$

Para estos valores de x sabemos que el denominador es cero (son las raíces del polinomio del denominador) y el numerador es distinto de cero (las raíces del numerador son 2 y $\frac{-2}{3}$). Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $y = 3$ y las asíntotas verticales son $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-4) \cdot (x^2-x-1) - (3x^2-4x-4) \cdot (2x-1)}{(x^2-x-1)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - (6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x - 8x + 42)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{6x^3 - 10x^2 - 2x + 4 - 6x^3 + 11x^2 + 4x - 42}{(x^2-x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x^2-x-1)^2} \end{aligned}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

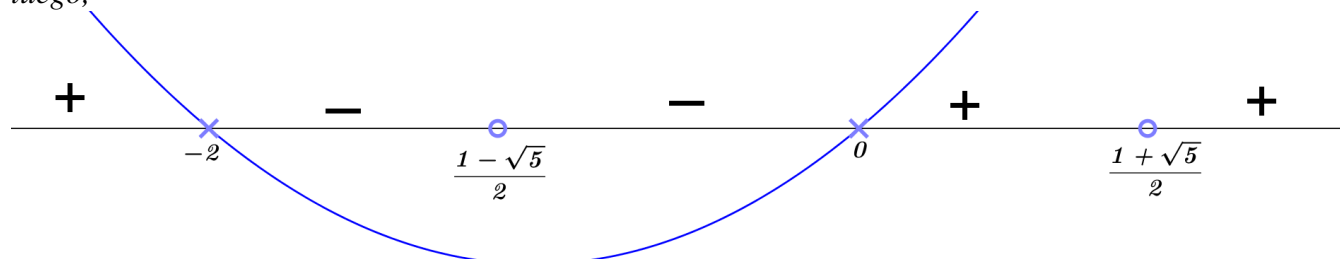
$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0; \quad x = -2 \end{cases}$$

$$(x^2 - x - 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left(\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} \notin \text{Dom } f(x) \right)$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -2 y 0 , luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y

$f(x)$ es decreciente en $\left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -2$ hay un máximo local y en $x = 0$ hay un mínimo local.

$$x = -2 \quad f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4}{(-2)^2 - (-2) - 1} = \frac{16}{5} = 3.2 \rightarrow \text{Máximo local } \left(-2, \frac{16}{5}\right)$$

$$x = 0 \quad f(0) = 4 \text{ \{calculado en el apartado a)\} } \rightarrow \text{Mínimo local } (0, 4)$$

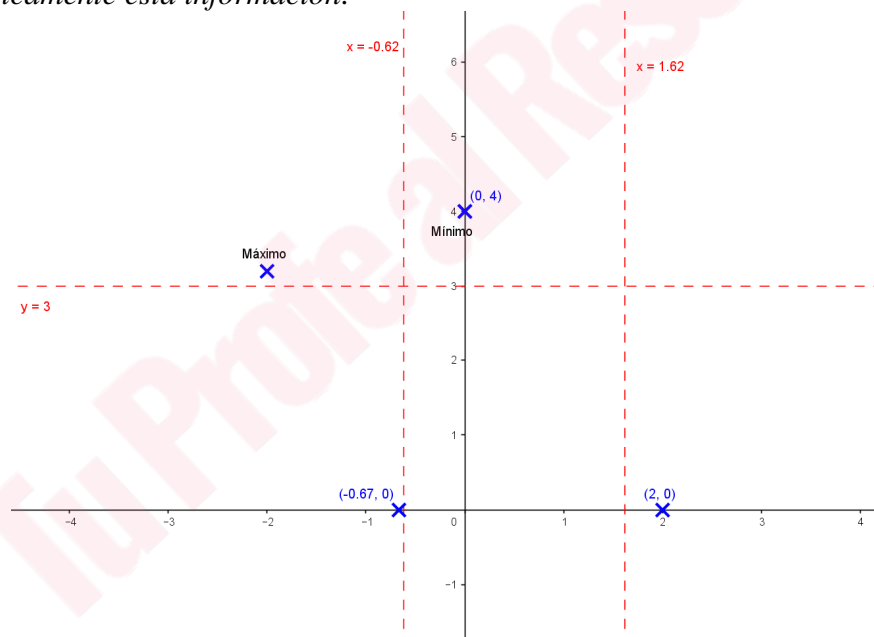
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 4)$, $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$, mínimo local en $(0, 4)$, máximo local en

$$\left(-2, \frac{16}{5}\right); \text{ a.h. } y = 3, \text{ a.v. } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ y } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

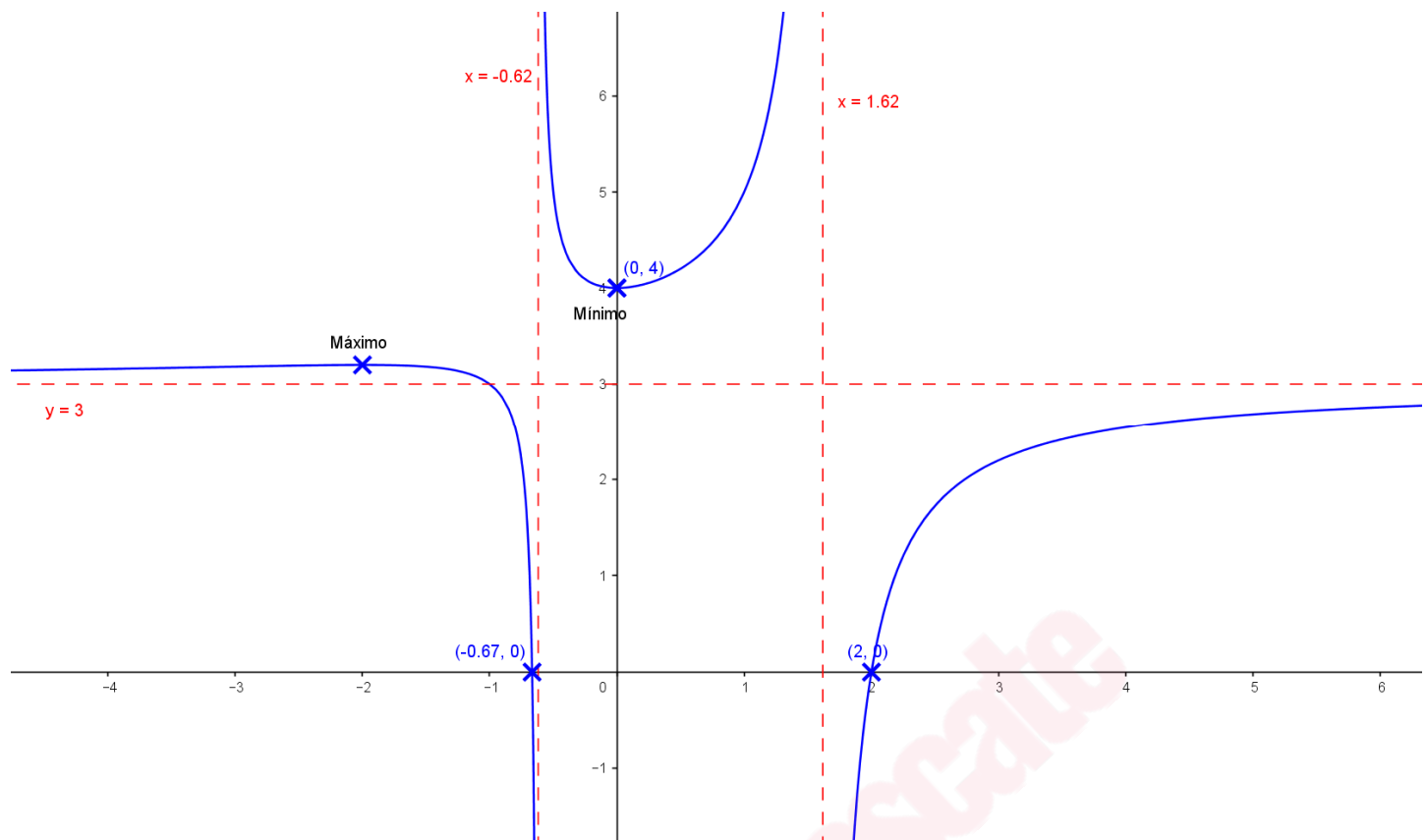
A.H. $y = 3$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{3 \cdot (-1000)^2 - 4 \cdot (-1000) - 4}{(-1000)^2 - (-1000) - 1} = 3.00099...$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{3 \cdot 1000^2 - 4 \cdot 1000 - 4}{1000^2 - 1000 - 1} = 2.998...$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10} (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

- ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? (2 puntos)
- ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? (4 puntos)
- A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? (4 puntos)

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{10} (800 + 15x + 6x^2 - x^3), \quad x \text{ meses después de compra } (0 \leq x \leq 12), \quad f(x) \text{ rendimiento en porcentaje.}$$

a)

$$f(1) = \frac{1}{10} (800 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3) = 82$$

$$f(2) = \frac{1}{10} (800 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3) = 84.6$$

Por tanto, el rendimiento de la máquina un mes después de su compra (82%) no es superior al que tiene dos meses después (84.6%).

b) Máximo.

Debemos estudiar el signo de $f'(t)$.

$$f(x) = \frac{1}{10} (800 + 15x + 6x^2 - x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{10} (15 + 12x - 3x^2)$$

$$f'(x) = 0; \quad \frac{1}{10} (15 + 12x - 3x^2) = 0; \quad 15 + 12x - 3x^2 = 0; \quad 3x^2 - 12x - 15 = 0; \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{4-6}{2} = -1 \notin \text{Dom } f \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $f'(t)$ en los intervalos:

	$f'(x) =$	
1	$\frac{1}{10} (15 + 12 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2) = 2.4 > 0$	
6	$\frac{1}{10} (15 + 12 \cdot 6 - 3 \cdot 6^2) = -2.1 < 0$	

Luego, en $x = 5$ hay un máximo local que es el absoluto ya que la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

$$f(5) = \frac{1}{10} (800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = 90$$

Solución: la máquina alcanza su mayor rendimiento 5 meses después de su compra y este rendimiento es del 90%.

c) ¿ $x? / f(x) < 10$

En el apartado anterior hemos obtenido que $f(x)$ es creciente entre 0 y 5 y decreciente de 5 a 12.

$$f(0) = \frac{1}{10} (800 + 15 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 - 0^3) = 80 \quad \text{y} \quad f(12) = \frac{1}{10} (800 + 15 \cdot 12 + 6 \cdot 12^2 - 12^3) = 11'6$$

La función $f(x)$ inicialmente vale $80 > 10$, hasta $x = 5$ es creciente y después decreciente. Como $f(12)$ es $11'6 > 10$, la función nunca toma valores inferiores a 10.

Solución: la máquina nunca tiene un rendimiento inferior al 10%.

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Dados dos sucesos A y B , se sabe que $P(B) = 0,4$, $P(A^c \cap B^c) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B , respectivamente. Se pide:

- Calcula la probabilidad del suceso $A \cup B$. (2'5 puntos)
- Calcula la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. (2'5 puntos)
- Calcula la probabilidad de B condicionado a A . (2'5 puntos)
- ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2'5 puntos)

Solución:

Los datos del problema son:

$$P(B) = 0,4, \quad P(A^c \cap B^c) = 0,2 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 0,3$$

Por las leyes de Morgan: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. Por tanto,

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,2 \rightarrow 1 - 0,2 = P(A \cup B) \rightarrow P(A \cup B) = 0,8$$

a) ¿ $P(A \cup B)$?

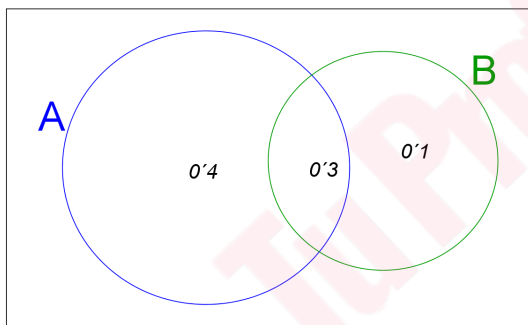
Según hemos calculado anteriormente, $P(A \cup B) = 0,8$.

b) Calcula la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.

Falta por obtener $P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad 0,8 = P(A) + 0,4 - 0,3; \quad 0,8 = P(A) + 0,1; \quad P(A) = 0,7$$

En un diagrama de Venn, los sucesos A y B quedarían representados:



Por tanto,

$$P(\text{sólo se verifique uno de los sucesos}) = 0,4 + 0,1 = 0,5$$

c) $P(B/A)$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

Solución: $P(B/A) = 3/7$.

d) ¿ A y B son independientes?

Los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

De lo calculado anteriormente,

$$P(A \cap B) = 0,3 \quad \text{y} \quad P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

Entonces $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

En conclusión, A y B no son sucesos independientes.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

- ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? (3 puntos)
- ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? (3 puntos)
- Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? (4 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

E = la empresa merece calificación de Excelente

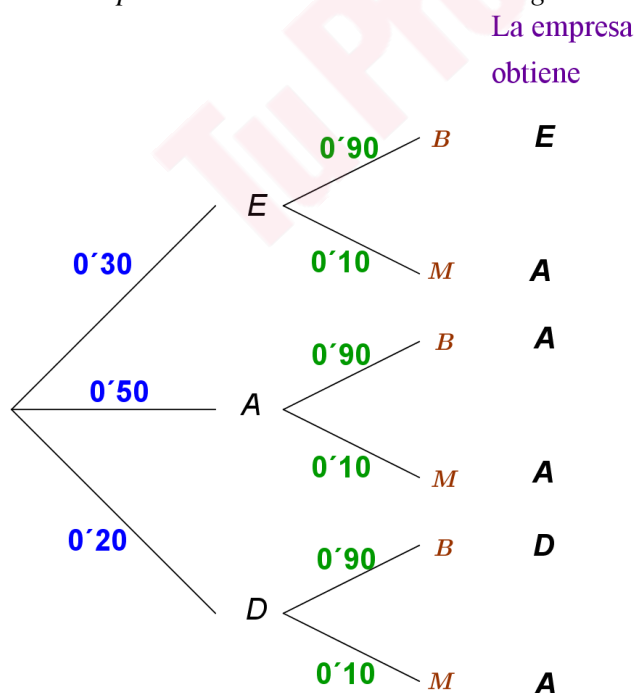
A = la empresa merece calificación de Aceptable

D = la empresa merece calificación de Deficiente

B = audita correctamente

M = no audita correctamente

Los datos del problema los resumimos en el siguiente árbol:



- ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»?

Es decir $P(D) = 0.20 \cdot 0.90 = 0.18$

El 18% de las empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

$$P(\text{calificación real}) = 0'30 \cdot 0'90 + 0'50 \cdot 0'90 + 0'50 \cdot 0'10 + 0'20 \cdot 0'90 = 0'95$$

El 95% de las empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece.

c) Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

La probabilidad pedida es $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0'50 \cdot 0'90}{0'30 \cdot 0'10 + 0'50 \cdot 1 + 0'20 \cdot 0'10} = \frac{0'45}{0'55} = \frac{9}{11}$$

La probabilidad pedida es $\frac{9}{11}$.

Tu Profe al Rescate