

OPCIÓN A

PROBLEMA 1. Un ganadero dispone de alimento concentrado y forraje para alimentar sus vacas. Cada kg. de alimento concentrado contiene 300 gr. de Proteína Cruda (PC), 100 gr. de Fibra Cruda (FC) y 2 Mcal. de Energía Neta de Lactancia (ENL) y su coste es 11 euros. Por su parte, cada kg. de forraje contiene 400gr. de PC, 300 gr. de FC y 1 Mcal. de ENL, siendo su coste de 6,50 euros. Determina la ración alimenticia de mínimo coste si sabemos que cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr. de PC, 1500 gr. de FC y 15 Mcal. de ENL. ¿Cuál es su coste?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	PC	FC	ENL	Coste
1 Kg de alimento concentrado	300 gr	100 gr	2 Mcal	11 €
1 Kg de forraje	400 gr	300 gr	1 Mcal	6'50 €

La ración alimenticia estará formada por

x = Kg de alimento concentrado

y = Kg de forraje

Las restricciones serán:

“cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr de PC”; $300x + 400y \geq 3500 \rightarrow 3x + 4y \geq 35$

“cada vaca debe ingerir al menos 1500 gr de FC”; $100x + 300y \geq 1500 \rightarrow x + 3y \geq 15$

“cada vaca debe ingerir al menos 15 Mcal de ENL”; $2x + y \geq 15$

Como x e y representan Kg de alimentos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \geq 0$

El coste de la ración alimenticia será: $11x + 6'5y$

Para determinar la ración alimenticia de mínimo coste debemos resolver el siguiente problema:

Minimizar $z = 11x + 6'5y$

$$s.a. \begin{cases} 3x + 4y \geq 35 \\ x + 3y \geq 15 \\ 2x + y \geq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $3x + 4y \geq 35$

$3x + 4y = 35$

x	y
0	35/4
35/3	0

¿(0,0) cumple?

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 35$ No

(b) $x + 3y \geq 15$

$x + 3y = 15$

x	y
0	5
15	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 3 \cdot 0 \geq 15$ No

(c) $2x + y \geq 15$

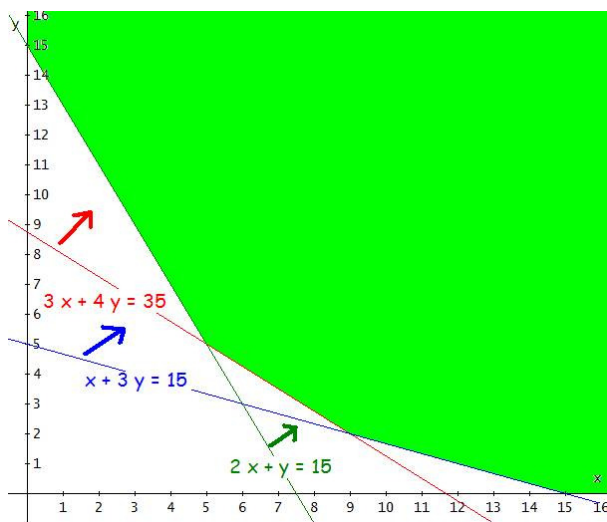
$2x + y = 15$

x	y
0	15
15/2	0

¿(0,0) cumple?

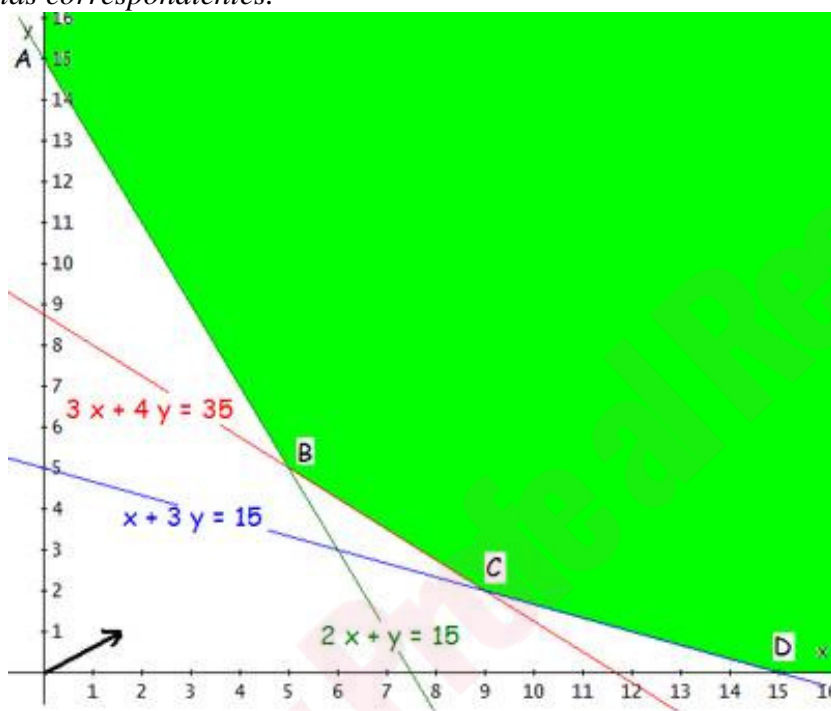
$2 \cdot 0 + 0 \geq 15$ No

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Es una región factible abierta.
Como el vector perpendicular a la función de coste es el representado a partir del origen, la función de coste no alcanza el máximo en esta región pero si su mínimo.

Son evidentes los vértices $A(0, 15)$ y $D(15, 0)$; calculemos los otros vértices.

B, (a) y (c):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ -8x - 4y = -60 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -5x = -25 \rightarrow x = 5$$

$$\text{Sustituyendo este valor de } x \text{ en la 2ª ecuación, } 2 \cdot 5 + y = 15; y = 5$$

Punto de corte $B(5, 5)$

C, (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ -3x - 9y = -45 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -5y = -10 \rightarrow y = 2$$

$$\text{Sustituyendo este valor de } y \text{ en la 2ª ecuación, } x + 3 \cdot 2 = 15; x = 9$$

Punto de corte $C(9, 2)$

Los vértices de la región factible son: $(0, 15)$, $(5, 5)$, $(9, 2)$ y $(15, 0)$.

La función de coste, z , alcanza su valor mínimo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 11x + 6'5y$	
0, 15	$11 \cdot 0 + 6'5 \cdot 15 = 97'5$	
5, 5	$11 \cdot 5 + 6'5 \cdot 5 = 87'5$	Mínimo
9, 2	$11 \cdot 9 + 6'5 \cdot 2 = 112$	
15, 0	$11 \cdot 15 + 6'5 \cdot 0 = 165$	

Para que el coste sea mínimo la ración alimenticia debe estar formada por 5 Kg. de alimento concentrado y 5 Kg. de forraje.

El coste de esta ración alimenticia será de 87'50 euros.

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Una pastelería ha comprobado que el número de pasteles de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio p en euros, según la función:

$$n(p) = 2000 - 1000 p$$

donde $n(p)$ es el número de pasteles vendidos cada semana. Calcula:

- La función $I(p)$ que expresa los ingresos semanales de la pastelería en función del precio p de cada pastel.
- El precio al que hay que vender cada pastel para obtener los ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Como semanalmente vende $n(p)$ pasteles a p euros, los ingresos semanales $I(p)$ se calculan como sigue:

$$I(p) = n(p) \cdot p = (2000 - 1000 p) p = 2000 p - 1000 p^2$$

Como p es el precio del pastel, no puede ser negativo; el número de pasteles vendidos tampoco puede ser negativo. Por lo tanto los valores que puede tomar p están determinados por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ 2000 - 1000 p \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ 2000 \geq 1000 p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ 2 \geq p \end{cases} \rightarrow 0 \leq p \leq 2$$

Por lo que, $I(p) = 2000 p - 1000 p^2$ y $\text{Dom } I(p) = [0, 2]$

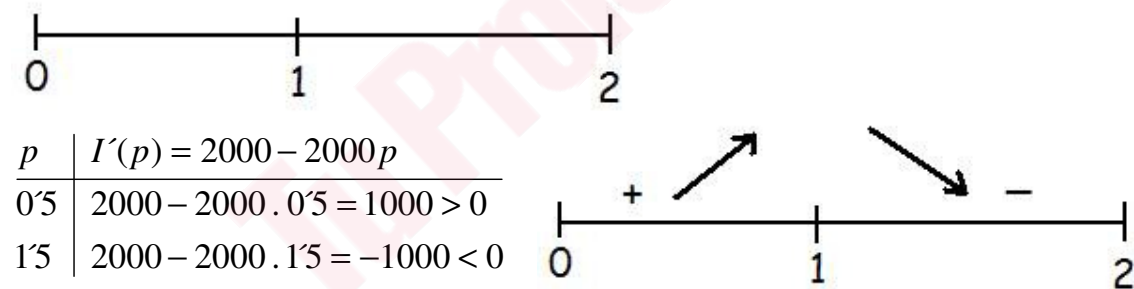
b) Busquemos el máximo de $I(p)$ (recordemos que $\text{Dom } I(p) = [0, 2]$)

Estudiamos la monotonía de $I(p)$,

$$I'(p) = 2000 - 2000 p$$

$$I'(p) = 0 \rightarrow 2000 - 2000 p = 0 \rightarrow 2000 = 2000 p \rightarrow p = 1 \in \text{Dom } I(p)$$

Debemos estudiar el signo de $I'(p)$ en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$



Por lo tanto en $p = 1$ la función $I(p)$ tiene un máximo relativo; como la función a la izquierda de 1 es creciente y a la derecha decreciente, este máximo relativo es absoluto.

$$\text{Para } p = 1 \rightarrow I(1) = 2000 \cdot 1 - 1000 \cdot 1^2 = 1000$$

Finalmente, hay que vender los pasteles a 1 euro para que el beneficio sea máximo y este beneficio será de 1000 euros.

OPCIÓN A

PROBLEMA 3. En un colegio se va a hacer una excursión a una estación de esquí con tres autobuses: uno grande, uno mediano y uno pequeño. La cuarta parte de los alumnos apuntados a la excursión irá en el autobús pequeño, la tercera parte en el mediano y el resto en el grande. Saben esquiar el 80% de los alumnos que viajarán en el autobús pequeño, el 60% de los que irán en el mediano y el 40% de los del autobús grande.

- Calcula la probabilidad de que un alumno de la excursión, elegido al azar, sepa esquiar.
- Elegimos un alumno de la excursión al azar y se observa que no sabe esquiar. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús mediano?
- Se toma un alumno de la excursión al azar y se observa que sabe esquiar. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús grande o en el pequeño?

Solución:

Utilizando los siguientes sucesos

AG = viaja en autobús grande
pequeño

AM = viaja en autobús mediano

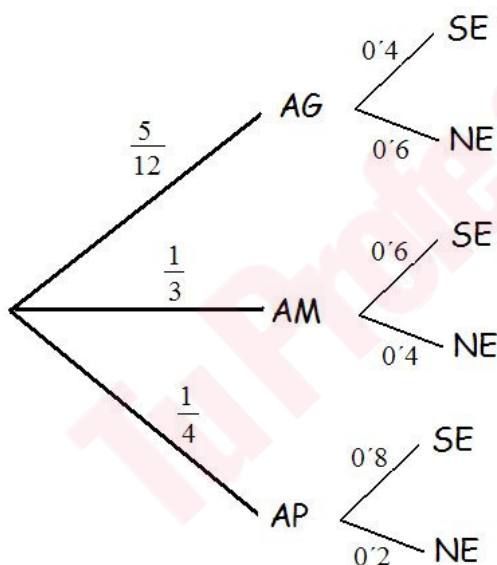
AP = viaja en autobús

SE = sabe esquiar

NE = no sabe esquiar (siendo $\overline{SE} = NE$)

Los datos del problema podemos resumirlos en el siguiente árbol:

En el autobús grande viaja: $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$ de los alumnos



a)

$$P(SE) = \frac{5}{12} \cdot 0.4 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 + \frac{1}{4} \cdot 0.8 = 0.5667$$

b)

$$P\left(\frac{AM}{NE}\right) = \frac{P(AM \cap NE)}{P(NE)}$$

$$\text{Como } \overline{SE} = NE \text{ y } P(SE) = 0.5667 \rightarrow P(NE) = 1 - P(SE) = 1 - 0.5667 = 0.4333$$

$$\text{Luego } P\left(\frac{AM}{NE}\right) = \frac{P(AM \cap NE)}{P(NE)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.4}{0.4333} = 0.3077$$

c)

$$\text{Luego } P\left(\frac{(AG \cup AP)}{SE}\right) = \frac{P((AG \cup AP) \cap SE)}{P(SE)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot 0.4 + \frac{1}{4} \cdot 0.8}{0.5667} = \frac{0.3667}{0.5667} = 0.6471$$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. En un cine se han vendido en una semana un total de 1405 entradas y la recaudación ha sido de 7920 euros. El precio de la entrada normal es de 6 euros y la del día del espectador 4 euros. El precio de la entrada para los jubilados es siempre de 3 euros. Se sabe, además, que la recaudación de las entradas de precio reducido es igual al 10% de la recaudación de las entradas normales. ¿Cuántas entradas de cada tipo se han vendido?

Solución:

Utilizando las siguientes incógnitas:

x = número de entradas normales (a 6 euros)

y = número de entradas del día del espectador (a 4 euros)

z = número de entradas para jubilados (a 3 euros)

de los datos del problema podemos obtener las siguientes ecuaciones,

“se han vendido 1405 entradas” $\rightarrow x + y + z = 1405$

“la recaudación ha sido de 7920 euros” $\rightarrow 6x + 4y + 3z = 7920$

“la recaudación de las entradas de precio reducido es igual al 10%

de la recaudación de las entradas normales” $\rightarrow 4y + 3z = 10\% \text{ de } 6x \rightarrow 4y + 3z = 0,6x \rightarrow -0,6x + 4y + 3z = 0$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y + z = 1405 \\ 6x + 4y + 3z = 7920 \\ -0,6x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{su matriz ampliada: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1405 \\ 6 & 4 & 3 & 7920 \\ -0,6 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Como A , matriz de coeficientes, es 3×3 , su máximo rango es 3. Como A' , matriz ampliada, es 3×4 , su máximo rango es 3. Por lo tanto empezamos estudiando el rango de A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ -0,6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 24 - 18 + 2,4 - 12 - 18 = 6,6 \neq 0$$

Por lo tanto $\text{rang}(A) = 3$, en consecuencia también $\text{rang}(A') = 3$.

Como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.

Podemos resolver el sistema por el método de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1405 & 1 & 1 \\ 7920 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{6,6} = \frac{16860 + 31680 - 16860 - 23760}{6,6} = \frac{7920}{6,6} = 1200$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1405 & 1 \\ 6 & 7920 & 3 \\ -0,6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6,6} = \frac{23760 - 2529 + 4752 - 25280}{6,6} = \frac{693}{6,6} = 105$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1405 \\ 6 & 4 & 7920 \\ -0,6 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{6,6} = \frac{33720 - 4752 + 3372 - 31680}{6,6} = \frac{660}{6,6} = 100$$

Solución: se han vendido 1200 entradas normales, 105 del día del espectador y 100 para jubilados.

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \leq 3 \\ -x^2 + 6x - 8 & 3 < x \leq 4 \\ 0 & 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

definida en el intervalo $[1, 5]$. Se pide:

- Estudia la continuidad en todos los puntos del intervalo $[1, 5]$.
- Calcula el área de la región del plano limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 2$ y $x = 4$ y la gráfica de $y = f(x)$.

*Solución:*a) Continuidad en $[1, 5]$

En $[1, 2)$, $f(x) = 2/x$ que es continua ya que $2/x$ no se puede calcular únicamente para $x = 0$ y 0 no pertenece al intervalo $[1, 2)$.

En $(2, 3)$, $f(x) = 1$, función constante, luego continua.

En $(3, 4)$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, función polinómica, luego continua.

En $(4, 5]$, $f(x) = 0$, función constante, luego continua.

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

En $x = 2$

$$f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \end{cases} = 1$$

$$f(2) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 2$

En $x = 3$

$$f(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 6x - 8) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1 \end{cases} = 1$$

$$f(3) = 1 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 3$

En $x = 4$

$$f(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x^2 + 6x - 8) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 8 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 0 = 0 \end{array} \right\} = 0$$

$$f(4) = 1 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 4$

En consecuencia, $f(x)$ es continua en $[1, 5]$

b) Para calcular el área pedida debemos representar gráficamente la función en el intervalo $[2, 4]$

En $[2, 3]$, $f(x) = 1$, recta horizontal.

En $[3, 4]$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, una parábola.

Representemos la parábola completamente y utilicemos el trozo correspondiente

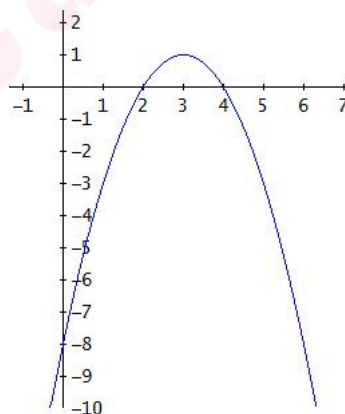
$$y = -x^2 + 6x - 8$$

$$x = 0 \rightarrow y = -8 \rightarrow \text{Corte eje OY } (0, -8)$$

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2} = \begin{cases} \frac{-6 + 2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ \frac{-6 - 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$

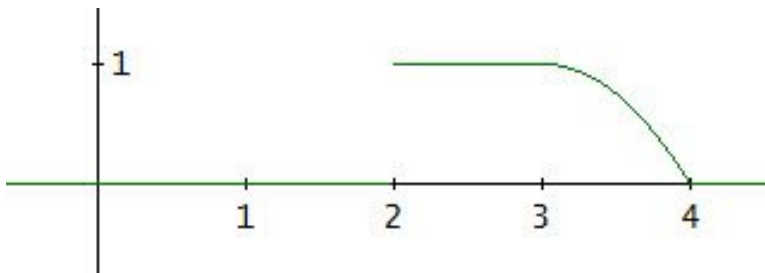
Corte eje OX $(2, 0)$ y $(4, 0)$

$$\text{Vértice } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1 \rightarrow (3, 1)$$

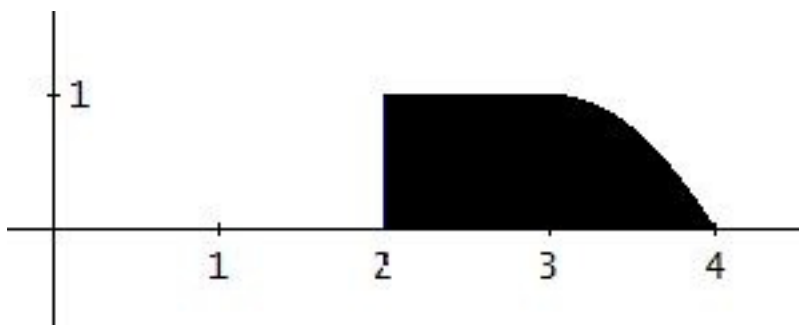


La representación de la parábola es:

Y la representación de $f(x)$ en $[2, 4]$:



El área pedida será:



que la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 1 \, dx + \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8) \, dx = [x]_2^3 + \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x \right]_3^4 = \\ &= (3-2) + \left(\frac{-4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - \left(\frac{-3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 \right) \right) = \\ &= 1 - \frac{64}{3} + 48 - 32 - (-9 + 27 - 24) = 17 - \frac{64}{3} - (-6) = 23 - \frac{64}{3} = \frac{69-64}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

El área mide $\frac{5}{3}$ u.a.

Tu Profeta al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA 3. Se tienen 10 monedas en una bolsa. Seis monedas son legales mientras que las restantes tienen dos caras. Se elige al azar una moneda.

- Calcula la probabilidad de obtener cara al lanzarla.
- Si al lanzarla se ha obtenido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea de curso legal?

Si se sacan dos monedas al azar sucesivamente y sin reemplazamiento

- ¿Cuál es la probabilidad de que una sea legal y la otra no lo sea?

Solución:

La urna del problema es:



Siendo *ML* las monedas legales y *MF* las monedas falsas

Utilizamos los siguientes sucesos:

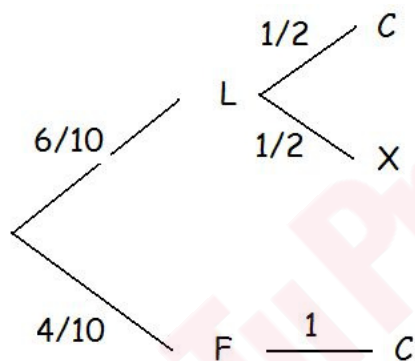
L = sacar moneda legal (tiene cara y cruz)

F = sacar moneda falsa (tiene dos caras)

C = obtener cara

X = obtener cruz

Elegimos una moneda al azar y observamos si es cara o cruz. El árbol de este problema será:



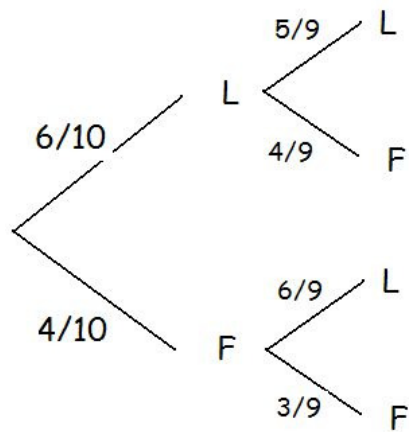
a)

$$P(C) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

b)

$$P\left(\frac{L}{C}\right) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{7}$$

Se sacan dos monedas al azar y sin reemplazamiento, el árbol del problema es:



c)

$$P(\text{una legal y la otra no}) = P(L \cap F) + P(F \cap L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

Tu Profe al Rescate