

CATALUÑA · PAU 2016 · ORDINARIA

# Matemáticas II

12 ejercicios

## Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

## Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{cases}$$

a) 1 punto

Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro real  $k$ .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso  $k = 0$ .

## Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . Explique razonadamente si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) 1 punto

Si  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , el sistema es compatible determinado y la solución es  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b) 1 punto

Si  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , el sistema es compatible indeterminado.

## Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

En  $\mathbb{R}^3$ , sean la recta  $r$  que tiene por ecuación  $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $2x - y + z = -2$ .

a) 1 punto

Determine la posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

b) 1 punto

Calcule la distancia entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

## Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Sean en  $\mathbb{R}^3$  el plano  $\pi$  de ecuación  $x - y + 2z = 2$  y los puntos  $A = (3, -1, 2)$  y  $B = (1, 1, -2)$ .

a) 1 punto

Compruebe que los puntos  $A$  y  $B$  son simétricos respecto del plano  $\pi$ .

b) 1 punto

Si  $r$  es la recta de los puntos  $P$  que tiene por ecuación  $P = B + \lambda v$ , en que  $\lambda$  es un parámetro real y  $v = (1, 1, 0)$ , verifique que los puntos medios de los segmentos  $\overline{AP}$  pertenecen al plano  $\pi$ .

## Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Sea la función  $f(x) = xe^{x-1}$ .

a) 1 punto

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) 1 punto

Determine en qué intervalos la función  $f$  es creciente y en qué intervalos es decreciente.

## Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Calcule los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ .

b) 1 punto

Explique razonadamente que si  $f(x)$  es una función con la derivada primera continua en el intervalo  $[a, b]$  y satisface que  $f'(a) > 0$  y  $f'(b) < 0$ , entonces hay, como mínimo, un punto del intervalo  $(a, b)$  en que la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en este punto es horizontal.

## Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Calcule todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$  que satisfacen la igualdad  $A^2 + A = 2I$ , en que  $I$  es la matriz identidad,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) 1 punto

Justifique que si  $A$  es una matriz cuadrada que cumple la igualdad  $A^2 + A = 2I$ , entonces  $A$  es invertible, y calcule la expresión de  $A^{-1}$  en función de las matrices  $A$  e  $I$ .

## Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  que satisface la igualdad  $A \cdot (A - I) = I$ , en que  $I$  es la matriz identidad.

a) 1 punto

Justifique que la matriz  $A$  es invertible y que  $A^{-1} = A - I$ .

b) 1 punto

Calcule el valor de  $a$  que hace que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  cumpla la igualdad  $A \cdot (A - I) = I$ . Calcule  $A^{-1}$  y compruebe que se corresponde con la matriz calculada a partir del resultado del apartado anterior.

## Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el tetraedro que tiene por vértices los puntos  $A = (x, 0, 1)$ ,  $B = (0, x, 1)$ ,  $C = (3, 0, 0)$  y  $D = (0, x, 0)$ , con  $0 < x < 3$ .

a) 1 punto

Compruebe que el volumen del tetraedro viene dado por la expresión  $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$ .

b) 1 punto

Determine el valor de  $x$  que hace que el volumen sea máximo y calcule este volumen máximo.

## Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Sean las rectas  $r : (x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$  y  $s : \frac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$ .

a) 1 punto

Estudie si las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas o perpendiculares.

b) 1 punto

Determine la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$  y calcule la ecuación paramétrica de la recta  $t$  que corta perpendicularmente la recta  $r$  y la recta  $s$ .

## Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Sean las parábolas  $f(x) = x^2 + k^2$  y  $g(x) = -x^2 + 9k^2$ .

a) 1 punto

Calcule las abscisas, en función de  $k$ , de los puntos de intersección entre las dos parábolas.

b) 1 punto

Calcule el valor del parámetro  $k$  para que el área comprendida entre las parábolas sea de 576 unidades cuadradas.

## Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sabemos que una función  $f(x)$  tiene por derivada  $f'(x) = (x + 1)e^x$  y que  $f(0) = 2$ .

a) 1 punto

Halle la ecuación de la recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto de la curva de abscisa  $x = 0$ .

b) 1 punto

Calcule la expresión de  $f(x)$ .