

Junio 2019 · Convocatoria ordinaria

El examen permite elegir una opción. Aquí desarrollamos las opciones A y B completas para que puedas practicar ambas.

Opción A

A.1. Matriz con parámetro

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}, \quad B^2 = \frac{1}{3}I - 2B.$$

Para estudiar el rango de una matriz cuadrada de orden 3, empezamos por su determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ a-1 & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -2 & a+1 \\ -3 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a(a+1) - 2(a-1)) + a(-2(a-1) + 3(a+1)) \\ &= (a^2 - a + 2) + a(a+5) = 2(a+1)^2. \end{aligned}$$

Si $a \neq -1$, entonces $\det A \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 3$.

Si $a = -1$, el determinante vale 0 y el rango es menor que 3. Comprobamos que hay un menor de orden 2 distinto de cero:

$$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

por tanto $\text{rg}(A) = 2$. En resumen,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \neq -1, \\ 2, & a = -1. \end{cases}$$

Para $a = 1$, $\det A = 2(1+1)^2 = 8 \neq 0$, por lo que A^{-1} existe. Para una matriz 3×3 , $\det(cM) = c^3 \det(M)$, y $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. Así,

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \frac{8}{\det A} = \frac{8}{8} = \boxed{1}.$$

A.1.b. Sistema para $a = -1$

Sustituimos $a = -1$ en la matriz y escribimos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = -1, \\ -2x + 2z = 2, \\ -3x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación es -2 veces la primera. Para justificar la compatibilidad, hacemos esas operaciones en la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array} \right).$$

La reducción deja dos filas no nulas, así que $\text{rg}(A^*) = 2$. El menor anterior demuestra que $\text{rg}(A) = 2$. Por tanto, los rangos coinciden:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$$

Como $2 < 3$, por Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado (SCI).
Tomamos $z = \lambda$. De la primera ecuación,

$$x - z = -1 \implies x = \lambda - 1.$$

Sustituimos en la tercera:

$$-3(\lambda - 1) - 2y - \lambda = 0 \implies -2y = 4\lambda - 3 \implies y = \frac{3}{2} - 2\lambda.$$

La segunda ecuación se cumple por ser múltiplo de la primera. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(\lambda - 1, \frac{3}{2} - 2\lambda, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

A.1.c. Inversa de B

Partimos de la relación del enunciado:

$$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$$

Multiplicamos la igualdad por 3 y agrupamos:

$$3B^2 + 6B = I, (3B + 6I)B = B(3B + 6I) = I.$$

Así, B tiene inversa y

$$B^{-1} = 3B + 6I, m = 3, n = 6.$$

A.2. Rectas y plano

La recta r viene dada como intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Tomamos $x = t$. Entonces $y = t + 3$ y $z = 2t + 3$, así que su forma paramétrica es

$$r: x = t, y = t + 3, z = 2t + 3, t \in \mathbb{R}.$$

La recta s está dada por $x = y + 1 = (z - 2)/2$. Si ese valor común es u , resulta

$$s: x = u, y = u - 1, z = 2u + 2, u \in \mathbb{R}.$$

Ambas tienen vector director $\vec{v} = (1, 1, 2)$. Elegimos $R = (0, 3, 3) \in r$ y $S = (0, -1, 2) \in s$. Como

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (0, -4, -1)$$

no es paralelo a $\vec{v}$, las rectas son paralelas y distintas, y determinan un único plano.

a) Plano que contiene a r y s . Un vector normal al plano debe ser perpendicular a $\vec{v}$ y a $\overrightarrow{RS}$. Calculamos:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{RS} = (1, 1, 2) \times (0, -4, -1) = (7, 1, -4).$$

La ecuación general del plano que pasa por R es

$$7(x - 0) + (y - 3) - 4(z - 3) = 0,$$

es decir,

$$\pi: 7x + y - 4z + 9 = 0.$$

b) Recta por $P = (0, -1, 2)$ que corta perpendicularmente a r . Sea $Q(t) = (t, t + 3, 2t + 3)$ un punto de r . Para que $PQ \perp r$, su vector debe ser perpendicular al director $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{PQ(t)} = Q(t) - P = (t, t + 4, 2t + 1),$$

$$\overrightarrow{PQ(t)} \cdot \vec{v} = (t, t + 4, 2t + 1) \cdot (1, 1, 2) = 6t + 6 = 0.$$

De aquí $t = -1$ y $Q = (-1, 2, 1)$. El director de la recta buscada es

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -1), \quad (-1, 3, -1) \cdot (1, 1, 2) = 0.$$

Por tanto, la recta en forma paramétrica es

$$\ell : x = -\lambda, y = -1 + 3\lambda, z = 2 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Valores de a, b para que s esté contenida en el plano. Escribimos el plano en forma general:

$$\pi : x - 2y + az - b = 0.$$

Sustituimos la forma paramétrica de s :

$$x - 2y + az - b = u - 2(u - 1) + a(2u + 2) - b = (2a - 1)u + (2 + 2a - b).$$

Para que todos los puntos de s pertenezcan al plano, esta expresión debe ser 0 para cualquier u . Igualamos por separado el coeficiente y el término independiente a cero:

$$2a - 1 = 0, \quad 2 + 2a - b = 0.$$

Así,

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 3.$$

A.3. Función $f(x) = xe^{-x^2}$

El dominio es $\mathbb{R}$: el polinomio x y la exponencial e^{-x^2} están definidos para todo número real y no hay denominadores ni raíces que restrinjan x .

Asíntotas. No hay asíntotas verticales porque la función está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Para las horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos. Comprobamos también las oblicuas: la pendiente tendría que ser $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$, pero

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

El término independiente correspondiente también vale $\lim(f(x) - 0x) = 0$; no aparece ninguna asíntota oblicua distinta de la horizontal $y = 0$.

Crecimiento, decrecimiento y extremos. Derivamos usando la regla del producto y la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) \\ &= e^{-x^2}(1 - 2x^2). \end{aligned}$$

Como $e^{-x^2} > 0$, los puntos críticos se obtienen de

$$1 - 2x^2 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Probamos el signo de la derivada en cada intervalo:

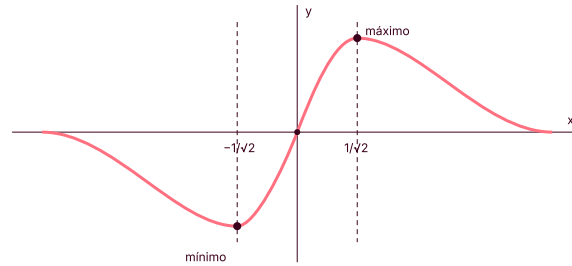
Intervalo o punto	Valor de prueba	Signo de f'	Conclusión
$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$f'(-1) = -e^{-1}$	-	Decrece
$-1/\sqrt{2}$	$f' = 0$	0	Mínimo
$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$f'(0) = 1$	+	Crece
$1/\sqrt{2}$	$f' = 0$	0	Máximo
$(1/\sqrt{2}, \infty)$	$f'(1) = -e^{-1}$	-	Decrece

En $x = -1/\sqrt{2}$ el signo cambia de negativo a positivo, y en $x = 1/\sqrt{2}$ cambia de positivo a negativo. Los valores son

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

El mínimo absoluto es $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2e}\right)$ y el máximo absoluto es $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2e}\right)$.

Gráfica propia. La curva pasa por $(0, 0)$, tiene los extremos anteriores y se aproxima a la asíntota $y = 0$ en ambos extremos:



Teorema de Rolle. Para $g(x) = f(x) + ax$, tanto f como ax son continuas en $[0, 1]$ y derivables en $(0, 1)$. Solo falta imponer $g(0) = g(1)$:

$$g(0) = 0, \quad g(1) = e^{-1} + a.$$

Igualemos los extremos:

$$0 = e^{-1} + a \implies \boxed{a = -\frac{1}{e}}.$$

Con este valor se cumplen las hipótesis de Rolle y existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $g'(c) = 0$.

Integrales indefinidas. En ambas usamos $u = -x^2$, por lo que $du = -2x \, dx$ y $x \, dx = -du/2$:

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int x e^{-x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u \, du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C}. \end{aligned}$$

La segunda integral se desarrolla con la misma sustitución:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x^2} \, dx &= -\frac{1}{2} \int e^u \, du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C}. \end{aligned}$$

Opción B

B.1. Discusión de un sistema

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 3x + 4y + 5z = 5, \\ 7x + 9y + 11z = \alpha. \end{cases}$$

Escribimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 11 - 5 \cdot 9) - 1(3 \cdot 11 - 5 \cdot 7) + 1(3 \cdot 9 - 4 \cdot 7) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Además, la tercera fila de A es la primera más dos veces la segunda:

$$(7, 9, 11) = (1, 1, 1) + 2(3, 4, 5),$$

así que $\text{rg}(A) \leq 2$. El menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

demuestra que $\text{rg}(A) = 2$.

Para estudiar A^* , calculamos un menor de orden 3 que incluya la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha - 45 - (3\alpha - 35) + 4(27 - 28) = \alpha - 14.$$

Si $\alpha \neq 14$, este menor no es cero, luego $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A) = 2$; por Rouché-Frobenius el sistema es incompatible (SI).

Si $\alpha = 14$, la tercera fila de A^* también es la primera más dos veces la segunda, porque $14 = 4 + 2 \cdot 5$. Por ello $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El menor de orden 2 anterior sigue siendo distinto de cero, así que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché-Frobenius, cuando $\alpha = 14$ el sistema es compatible indeterminado (SCI).

Para hallar todas sus soluciones, tomamos $\alpha = 14$ y restamos tres veces la primera ecuación de la segunda:

$$(3x + 4y + 5z) - 3(x + y + z) = 5 - 3 \cdot 4 \implies y + 2z = -7.$$

Tomamos $z = t$. Entonces $y = -7 - 2t$, y usando la primera ecuación:

$$x = 4 - y - z = 4 - (-7 - 2t) - t = 11 + t.$$

La tercera ecuación se satisface por ser la primera más dos veces la segunda. Por tanto,

$$(x, y, z) = (11 + t, -7 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cambio del coeficiente 11. Lo sustituimos por k , con $k \neq 11$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{pmatrix}.$$

$$\det A_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = 1(4k - 5 \cdot 9) - 1(3k - 5 \cdot 7) + 1(3 \cdot 9 - 4 \cdot 7) = k - 11 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A_k) = 3$. La matriz ampliada tiene también tres filas, de modo que su rango es 3. Por Rouché-Frobenius, el nuevo sistema es compatible determinado (SCD) para cualquier valor del término independiente α .

B.2. Plano, ejes y tetraedro

Escribimos el plano dado en forma general:

$$\pi : 9x + 12y + 20z - 180 = 0.$$

Un plano paralelo tiene los mismos coeficientes de x, y, z , así que lo escribimos como

$$\sigma : 9x + 12y + 20z + d = 0.$$

La distancia entre planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$\text{dist}(\pi, \sigma) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aquí $d_1 = -180$ y $\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2} = 25$. Imponemos la distancia de 4 unidades:

$$\frac{|d + 180|}{25} = 4 \implies |d + 180| = 100.$$

Así, $d = -80$ o $d = -280$. En forma general, los dos planos son

$$\boxed{9x + 12y + 20z - 80 = 0}, \quad \boxed{9x + 12y + 20z - 280 = 0}.$$

Para hallar los cortes con los ejes, anulamos las otras dos coordenadas:

$$\text{Eje } x : y = z = 0 \implies 9x = 180 \implies A = (20, 0, 0),$$

$$\text{Eje } y : x = z = 0 \implies 12y = 180 \implies B = (0, 15, 0),$$

$$\text{Eje } z : x = y = 0 \implies 20z = 180 \implies C = (0, 0, 9).$$

El ángulo pedido es el que forman $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos primero los vectores, sus longitudes y el producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-20, 15, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-20, 0, 9),$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 400, \quad |\overrightarrow{AB}| = 25, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{481}.$$

Usamos la fórmula del producto escalar:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{25\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}}.$$

Por tanto, el ángulo exacto es

$$\boxed{\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{481}}\right)}.$$

El volumen del tetraedro $OABC$ es un sexto del volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} (20 \cdot 15 \cdot 9) = \boxed{450 \text{ unidades cúbicas}}. \end{aligned}$$

B.3. Movimiento de dos móviles

Tomamos el origen y los ejes indicados en el enunciado. Para t horas desde el inicio, mientras se mueven:

$$A(t) = (0, 30t) \text{ km},$$

$$B(t) = (250 - 40t, 0) \text{ km}.$$

El móvil A llega al punto final $(0, 375/2)$ cuando

$$30t = \frac{375}{2} \implies t = \frac{375}{60} = \frac{25}{4} \text{ h}.$$

El móvil B llega al origen cuando $250 - 40t = 0$, es decir, $t = 250/40 = 25/4$ h. Por tanto, ambos terminan simultáneamente y el intervalo de estudio es $0 \leq t \leq 25/4$.

a) Distancia en función del tiempo. Aplicamos la fórmula de distancia entre puntos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{(250 - 40t - 0)^2 + (0 - 30t)^2} \\ &= \sqrt{(250 - 40t)^2 + (30t)^2} \\ &= \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500} \text{ km}. \end{aligned}$$

b) Crecimiento y decrecimiento. Como $f(t) > 0$ durante todo el trayecto, derivamos la raíz:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{5000t - 20000}{2\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}} \\ &= \frac{2500(t - 4)}{f(t)}. \end{aligned}$$

El denominador es positivo, así que el signo depende de $t - 4$. Comprobamos con valores del intervalo:

Intervalo o punto	Valor de prueba	Signo de f'	Conclusión
$[0, 4)$	$f'(0) = -40 \text{ km/h}$	$-$	Decrece
4	$f'(4) = 0$	0	Mínimo
$(4, 25/4]$	$f'(5) = 5\sqrt{10} \text{ km/h}$	$+$	Crece

Por tanto, la distancia decrece desde $t = 0$ hasta $t = 4$ y crece desde $t = 4$ hasta $t = 25/4$.

c) Distancias máxima y mínima. El cambio de signo de f' de negativo a positivo da el mínimo en $t = 4$. Para hallar el máximo absoluto en el intervalo cerrado, comparamos los extremos y el punto crítico:

$$f(0) = \sqrt{250^2} = 250 \text{ km}, f(4) = \sqrt{90^2 + 120^2} = 150 \text{ km}, f\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{375}{2} \text{ km}.$$

Como $250 > 375/2 > 150$, la distancia máxima es **250 km** al inicio, $t = 0$, y la mínima es **150 km** a las $t = 4$ h.