

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función es $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Al acercarnos a $x = 1$, el denominador tiende a cero mientras que el numerador es positivo, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Así, $x = 1$ es asíntota vertical. En el otro extremo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$. En $+\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$; además, $f(x)/x \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota horizontal ni oblicua en ese extremo.

b) El signo de la derivada permite estudiar el crecimiento. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Como $e^x > 0$ y $(x-1)^2 > 0$ en el dominio, el signo depende de $x-2$. Incluimos también la discontinuidad $x = 1$ al separar intervalos:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de f'	-	-	+
Comportamiento	decreciente	decreciente	creciente

En $x = 2$ la derivada pasa de negativa a positiva, así que hay un mínimo relativo:

$$f(2) = e^2 \implies \boxed{(2, e^2)}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Como $F' = f$ y $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$ para $x > 0$, el valor pedido es

$$\boxed{F'(e) = f(e) = \frac{1}{2e}}.$$

Para hallar la tangente necesitamos también $F(e)$. Una primitiva es

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C.$$

La condición $F(1) = 2$ da $C = 2$, pues $\ln 1 = 0$. Entonces $F(e) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. La recta tangente, con pendiente $F'(e)$ y pasando por $(e, F(e))$, es

$$y - \frac{9}{4} = \frac{1}{2e}(x - e) \implies \boxed{y = \frac{x}{2e} + \frac{7}{4}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 + \alpha \end{pmatrix}, \quad (A_{\alpha} | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 + \alpha & 4 + \alpha \end{array} \right).$$

Su determinante es

$$\det A_{\alpha} = (\alpha + 2)(\alpha + 4).$$

a) Si $\alpha \neq -2, -4$, el determinante es distinto de cero, así que $\text{rg}(A_{\alpha}) = 3$ y el sistema es compatible determinado. Por tanto, tiene solución única para

$$\alpha \neq -2, -4.$$

b) Solo hay que estudiar $\alpha = -2$ y $\alpha = -4$. En ambos casos el rango de A_{α} es 2: el menor de las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $\alpha - 1$, que no se anula en ninguno de ellos.

Para $\alpha = -2$, las filas de coeficientes cumplen $-F_1 - F_2 + F_3 = 0$, y la misma combinación de términos independientes vale $-4 + 2 + 2 = 0$. Por tanto, los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada son iguales a $2 < 3$: el sistema es SCI. Sus ecuaciones independientes pueden escribirse como

$$x + y - 2z = -2, \quad 3y - z = 0.$$

Tomando $y = t$, resulta $z = 3t$ y $x = 5t - 2$. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (5t - 2, t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\alpha = -4$, las filas de coeficientes verifican $-3F_1 - 7F_2 + 5F_3 = 0$, pero la misma combinación en los términos independientes da $-12 + 14 + 0 = 2 \neq 0$. Así, $\text{rg}(A_{-4}) = 2$ y $\text{rg}(A_{-4} | b) = 3$; el sistema es incompatible.

Opción A - Ejercicio 4

La recta s pasa por $S_0 = (4, 8, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (5, -3, 4)$. Para hallar la recta por $P = (3, -5, 4)$ que la corta perpendicularmente, proyectamos P sobre s . El parámetro del pie $Q = S_0 + t\vec{v}$ se obtiene de la condición $(P - Q) \cdot \vec{v} = 0$:

$$t = \frac{(P - S_0) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{(-1, -13, 4) \cdot (5, -3, 4)}{50} = 1.$$

Luego $Q = (9, 5, 4)$ y $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, 10, 0)$, que es perpendicular a $\vec{v}$. La recta pedida en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = -5 + 5t, \\ z = 4, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea x el lado de la base cuadrada y h la altura, en centímetros. La condición del enunciado da $h + 4x = 60$, por lo que $h = 60 - 4x$ y el dominio físico es $0 < x < 15$. El volumen que queremos maximizar es

$$V(x) = x^2 h = x^2(60 - 4x) = 60x^2 - 4x^3.$$

Buscamos los puntos críticos:

$$V'(x) = 120x - 12x^2 = 12x(10 - x) = 0 \implies x = 10 \text{ cm}$$

(el valor $x = 0$ queda fuera del dominio físico). Entonces $h = 60 - 4(10) = 20$ cm. Como $V''(10) = 120 - 240 = -120 < 0$, se alcanza un máximo. Las dimensiones son

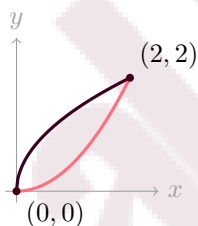
10 cm de lado y 20 cm de altura.

Opción B - Ejercicio 2

Los puntos de corte satisfacen $\sqrt{2x} = \frac{1}{2}x^2$, con $x \geq 0$. Ambos lados son no negativos, así que podemos elevar al cuadrado sin cambiar las soluciones:

$$2x = \frac{x^4}{4} \iff x(x^3 - 8) = 0.$$

De aquí, $x = 0$ o $x = 2$, y las intersecciones son $(0, 0)$ y $(2, 2)$. Para $0 < x < 2$, la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ queda por encima de $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; el recinto es



b) El área se obtiene integrando función superior menos función inferior entre los puntos de corte:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Tomamos determinantes en $X^2AX = B$. Usando la multiplicatividad,

$$\det(X^2AX) = \det(X)^2 \det(A) \det(X) = \det(X)^3 \det(A).$$

Como $\det A = 1 - 2 = -1$ y $\det B = 4 + 4 = 8$, se obtiene

$$-\det(X)^3 = 8 \implies \boxed{\det X = -2}.$$

b) De $A^2YB^{-1} = A$, multiplicamos a la izquierda por $(A^2)^{-1}$ y a la derecha por B :

$$Y = (A^2)^{-1}AB = A^{-1}B.$$

La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r se escribe en forma paramétrica tomando el valor común de las razones como t :

$$r : \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto es $R_0 = (-2, -1, 0)$ y un vector director es $\vec{v} = (3, 4, 1)$.

a) Sea $C_t = R_0 + t\vec{v}$ un punto de la recta. Para que sea equidistante del origen O y de $P = (4, -2, 2)$, debe cumplirse $\|C_t\|^2 = \|C_t - P\|^2$. Al desarrollar y simplificar, la condición equivale a

$$2C_t \cdot P = \|P\|^2.$$

Como $\|P\|^2 = 24$ y $C_t \cdot P = -6 + 6t$, resulta $-12 + 12t = 24$, de donde $t = 3$. El punto pedido es

$$\boxed{C_3 = (7, 11, 3)}.$$

b) El punto de la recta más próximo al origen es el pie de la perpendicular; por ello, su vector de posición debe ser ortogonal al director $\vec{v}$. Si $Q = R_0 + t\vec{v}$, imponemos $Q \cdot \vec{v} = 0$:

$$t = -\frac{R_0 \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = -\frac{-10}{26} = \frac{5}{13}.$$

Así, el punto más cercano es

$$\boxed{Q = \left(-\frac{11}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13}\right)}.$$