Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2012--2013 · Convocatoria v4

Soluciones originales de las opciones A y B, con los cálculos y criterios empleados.

Opción A

Ejercicio 1 · Ecuaciones matriciales

a) Como B es invertible, de $BX = 3A + A^t$ despejamos $X = B^{-1}(3A + A^t)$. En efecto, $\det B = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$, luego

$$3A + A^t = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

b) Escribimos $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. La ecuación proporciona tres relaciones lineales para sus dos componentes:

$$2y_1 + 5y_2 = 6, \qquad y_1 - 5y_2 = -12, \qquad 2y_1 - y_2 = -6.$$

De la segunda, $y_1 = -12 + 5y_2$. Al sustituirla en la primera obtenemos $-24 + 15y_2 = 6$, es decir, $y_2 = 2$ y $y_1 = -2$. La tercera igualdad se verifica con estos valores.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y extremos

El dominio es $\mathbb{R}$, porque las tres ramas están formadas por polinomios. Solo es necesario comprobar los puntos de unión, $x = -3$ y $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12, & x < -3, \\ -x + 3, & -3 \le x \le 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases}$$

En $x = -3$, el valor y los dos límites valen 6; en $x = 2$, valen 1. La función es continua en ambos puntos. Para la derivabilidad comparamos las pendientes de las ramas:

$$f'_-(-3) = 4(-3) = -12, \quad f'_+(-3) = -1; \qquad f'_-(2) = -1, \quad f'_+(2) = 1.$$

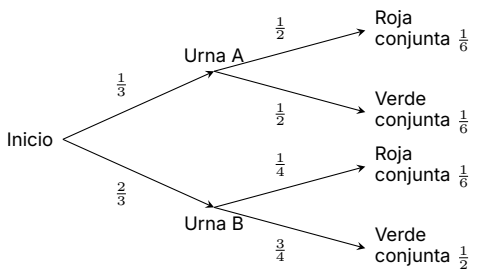
No coinciden en ninguno de los empalmes, por lo que la función no es derivable ni en -3 ni en 2.

En $x < -3$, $f'(x) = 4x < 0$; en $-3 < x < 2$, $f'(x) = -1 < 0$; y en $x > 2$, $f'(x) = 1 > 0$. La función decrece hasta $x = 2$ y crece después. Aunque en -3 no sea derivable, mantiene el decrecimiento a ambos lados, así que allí no hay extremo. En $x = 2$ cambia de decreciente a creciente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Continua en } x = -3, 2; \quad \text{no derivable en ambos,} \\ \text{decrece en } (-\infty, 2), \quad \text{crece en } (2, \infty); \\ \text{mínimo relativo: } f(2) = 1. \end{array}}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sea A el suceso «se elige la urna A» y B «se elige la urna B». El dado lleva a A con probabilidad $2/6 = 1/3$ y a B con probabilidad $4/6 = 2/3$. En la urna A la probabilidad de roja es $10/20 = 1/2$; en B, $5/20 = 1/4$.



En cada camino multiplicamos las probabilidades de sus ramas; para calcular una probabilidad con varios caminos incompatibles, sumamos las probabilidades conjuntas de esos caminos. Para b), la rama «urna B y verde» vale $1/2$, y $P(\text{verde}) = 1/6 + 1/2 = 2/3$, así que aplicamos Bayes:

$$P(\text{roja}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \qquad P(B \mid \text{verde}) = \frac{P(B \cap \text{verde})}{P(\text{verde})} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{P(\text{roja}) = \frac{1}{3}; \qquad P(B \mid \text{verde}) = \frac{3}{4}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una media

Como la desviación típica poblacional es conocida, para una confianza del 98% usamos $z_{0,99} \approx 2{,}33$. El error máximo es $E = z\sigma/\sqrt{n}$ y la amplitud total del intervalo es $2E$. Con $\sigma = 0{,}3$ g y $n = 9$:

$$E = 2{,}33\frac{0{,}3}{\sqrt{9}} = 0{,}233 \text{ g}, \qquad \text{amplitud} = 2E = 0{,}466 \text{ g}.$$

Como E es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$, aumentar el tamaño de la muestra reduce la amplitud.
Para los nueve pesos, la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{7 + 7{,}1 + 7 + 6{,}93 + 7{,}02 + 7 + 7{,}01 + 6{,}5 + 7{,}1}{9} = \frac{62{,}66}{9} \approx 6{,}9622 \text{ g}.$$

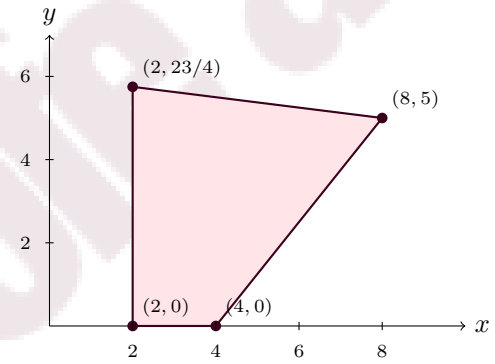
El intervalo es $\bar{x} \pm E$:

$$\boxed{\text{amplitud} = 0{,}466 \text{ g}; \qquad IC_{98\%}(\mu) \approx (6{,}7292,\ 7{,}1952) \text{ g}.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Región factible y función objetivo

El recinto está definido por $5x - 4y \le 20$, $x + 8y \le 48$, $x \ge 2$ e $y \ge 0$. Sus vértices son $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(8, 5)$ y $(2, 23/4)$: la recta $y = 0$ corta a $5x - 4y = 20$ en $(4, 0)$; la recta $x = 2$ corta a $x + 8y = 48$ en $(2, 23/4)$; y la intersección de las dos rectas oblicuas es $(8, 5)$. La región y sus vértices se muestran en la figura.



La función objetivo es $F(x, y) = 2x + 12y$. Al ser lineal, sus extremos se encuentran en los vértices:

(x, y)	$(2, 0)$	$(4, 0)$	$(8, 5)$	$(2, 23/4)$
$F(x, y)$	4	8	76	73

El máximo es 76 en $(8, 5)$, y el mínimo es 4 en $(2, 0)$. Como $100 > 76$, no existe punto factible donde $F(x, y) = 100$.

$$\boxed{F_{\text{max}} = 76 \text{ en } (8, 5); \quad F_{\text{min}} = 4 \text{ en } (2, 0); \quad F(x, y) = 100 \text{ no se alcanza en } R.}$$

Ejercicio 2 · Curvatura, tangente y crecimiento

La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. La segunda derivada permite estudiar la curvatura:

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x, \qquad f''(x) = 6x - 48 = 6(x - 8).$$

Si $x < 8$, $f''(x) < 0$ y la función es cóncava; si $x > 8$, $f''(x) > 0$ y es convexa. Como cambia el signo en $x = 8$, allí hay un punto de inflexión y $f(8) = -992$.

Para la tangente en $x=-2$, calculamos el punto y la pendiente:

$$f(-2) = -8 - 96 - 8 = -112, \qquad f'(x) = 3x^2 - 48x + 4, \qquad f'(-2) = 112.$$

La forma punto-pendiente $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$ da $y + 112 = 112(x+2)$, por tanto $y = 112x + 112$.
Por último, el signo de la derivada en $x=1$ determina la monotonía en ese punto:

$$f'(1) = 3 - 48 + 4 = -41 < 0.$$

Cóncava en $(-\infty, 8)$, convexa en $(8, \infty)$, inflexión $(8, -992)$; $y = 112x + 112$; decreciente en $x = 1$.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada y total

Sean I «habla inglés» y A «habla alemán». Se sabe que $P(I) = 0{,}65$, $P(A \mid I) = 0{,}40$ y $P(A \mid \overline{I}) = 0{,}25$. En la rama de quienes hablan inglés, la probabilidad de ambos idiomas es el producto de la probabilidad de llegar a esa rama y la probabilidad condicionada:

$$P(I \cap A) = P(I)P(A \mid I) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 = 0{,}26.$$

Para la probabilidad total de alemán sumamos los casos «inglés y alemán» y «no inglés y alemán»:

$$P(A) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}3475.$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada,

$$P(I \mid A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}26}{0{,}3475} = \frac{104}{139} \approx 0{,}7482.$$

$P(I \cap A) = 0{,}26; \qquad P(A) = 0{,}3475; \qquad P(I \mid A) = \dfrac{104}{139} \approx 0{,}7482.$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una proporción

La afirmación de los representantes es $p \geq 0{,}35$. Contrastamos esa hipótesis frente a que la proporción sea menor:

$$H_0 : p \geq 0{,}35, \qquad H_1 : p < 0{,}35.$$

La proporción observada es $\hat{p} = 336/1200 = 0{,}28$. Bajo el valor frontera $p_0 = 0{,}35$, el estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}, \qquad z_{\text{obs}} = \frac{0{,}28 - 0{,}35}{\sqrt{0{,}35 \cdot 0{,}65/1200}} \approx -5{,}08.$$

Para una prueba de cola izquierda con $\alpha = 0{,}01$, el valor crítico es $-2{,}326$. Como $-5{,}08 < -2{,}326$, rechazamos H_0: los datos no respaldan la creencia de que la proporción llegue al 35%.

Se rechaza H_0 al 1%; la muestra aporta evidencia de que $p < 0{,}35$.