

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea x la longitud de alambre destinada al triángulo equilátero; los $10 - x$ metros restantes forman el cuadrado. El dominio físico es $0 \leq x \leq 10$. Los lados miden $x/3$ y $(10 - x)/4$, respectivamente, así que la suma de las áreas es

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{10 - x}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(10 - x)^2}{16}.$$

Derivamos para hallar el mínimo:

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{10 - x}{8} = 0 \implies x = \frac{90}{9 + 4\sqrt{3}}.$$

Como $A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$, la función es estrictamente convexa y este punto crítico da el mínimo absoluto. Por tanto, los trozos de alambre deben medir

$$\frac{90}{9 + 4\sqrt{3}} \text{ m para el triángulo, } \frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} \text{ m para el cuadrado.}$$

Opción A - Ejercicio 2

Integramos la derivada dada. Observamos que

$$\frac{d}{dx} (-(2x + 3)e^{-x}) = (2x + 1)e^{-x},$$

por lo que $f(x) = -(2x + 3)e^{-x} + C$. La condición de que la gráfica pase por el origen, $f(0) = 0$, determina $C = 3$. Así,

$$f(x) = 3 - (2x + 3)e^{-x}.$$

La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $f'(0) = 1$ y el punto de tangencia es $(0, 0)$. La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \implies \boxed{y = x}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Calculamos por separado los determinantes para decidir si existen las inversas:

$$\det A = 2 \neq 0, \quad \det B = 0,$$

ya que las dos primeras columnas de B son opuestas. Por tanto, A es invertible y B no lo es. Resolviendo $AA^{-1} = I$ se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para el determinante pedido en b), usamos la multiplicatividad y que $\det(A^t) = \det A$:

$$\det(AB^{2013}A^t) = \det A (\det B)^{2013} \det(A^t) = 2 \cdot 0 \cdot 2 = \boxed{0}.$$

La ecuación matricial $AX - B = AB$ equivale a $AX = AB + B$. Calculamos primero el producto AB :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB + B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda para despejar X :

$$X = A^{-1}(AB + B) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Los cortes del plano con los ejes se obtienen anulando dos coordenadas cada vez:

$$P = (3, 0, 0), \quad Q = (0, 6, 0), \quad R = (0, 0, 2).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten del mismo vértice:

$$\overrightarrow{PQ} = (-3, 6, 0), \quad \overrightarrow{PR} = (-3, 0, 2),$$
$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 6^2 + 18^2} = \boxed{3\sqrt{14}}.$$

El tetraedro rectángulo tiene como aristas sobre los ejes las longitudes 3, 6 y 2. Su volumen es

$$V = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{6} = \boxed{6}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = 2\ln(x)/x^2$ tiene dominio $(0, +\infty)$, pues el logaritmo exige $x > 0$. Derivamos para estudiar su crecimiento y sus extremos:

$$f'(x) = \frac{2(1 - 2\ln x)}{x^3}.$$

Como $x^3 > 0$, el signo depende de $1 - 2\ln x$. Se anula cuando $x = \sqrt{e}$; es positivo si $0 < x < \sqrt{e}$ y negativo si $x > \sqrt{e}$. Por tanto, la función crece en $(0, \sqrt{e})$, decrece en $(\sqrt{e}, +\infty)$ y alcanza un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$, de valor

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{e} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

Para las asíntotas, los límites en los extremos del dominio son

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x}{x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0.$$

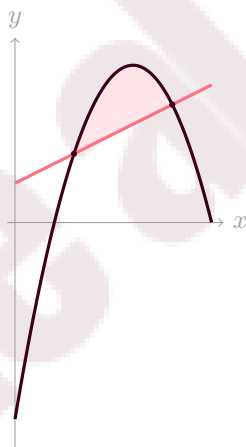
Así, $x = 0$ es una asíntota vertical y $y = 0$ una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$. Al existir esta asíntota horizontal, no hay que buscar una oblicua.

Opción B - Ejercicio 2

La recta se escribe como $y = \frac{x}{2} + 1$. Para hallar los puntos de corte con la parábola, resolvemos

$$-x^2 + 6x - 5 = \frac{x}{2} + 1 \iff 2x^2 - 11x + 12 = 0,$$

de donde $x = \frac{3}{2}$ y $x = 4$. En ese intervalo la parábola queda por encima de la recta; por ejemplo, en $x = \frac{5}{2}$ sus valores son $\frac{15}{4}$ y $\frac{9}{4}$. El área corresponde a la integral de la diferencia:



$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{3/2}^4 \left(-x^2 + 6x - 5 - \frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{4} - 6x \right]_{3/2}^4 = \boxed{\frac{125}{48}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & m & 2 \\ -3 & 6 & -3m \end{pmatrix}, \quad A_m^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{array} \right).$$

Su determinante es $\det A_m = -6m(m-3)$. Si $m \neq 0, 3$, los rangos de ambas matrices son 3, así que el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$, la segunda ecuación da $z = \frac{1}{2}$. Al dividir la primera y la tercera por sus coeficientes comunes, se obtiene respectivamente $x - 2y = \frac{3}{2}$ y $x - 2y = 3$. Son incompatibles: las filas de coeficientes tienen rango 2, pero la ampliada tiene rango 3. Por tanto, $\text{rg}(A_0) = 2 < \text{rg}(A_0^*) = 3$ y el sistema no tiene solución.

Si $m = 3$, la tercera ecuación es $-\frac{3}{2}$ veces la primera, también en el término independiente; por tanto, $\text{rg}(A_3) = \text{rg}(A_3^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Tomando $y = t$,

$$3t + 2z = 4 \implies z = 2 - \frac{3}{2}t, \quad x - 2t + 3z = 3 \implies x = -3 + \frac{13}{2}t.$$

Su solución general es

$$(x, y, z) = \left(-3 + \frac{13}{2}t, t, 2 - \frac{3}{2}t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que $y = 0$ tomamos $t = 0$, y obtenemos la solución $\boxed{(-3, 0, 2)}$.

Opción B - Ejercicio 4

Restando las coordenadas, obtenemos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, -1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 0).$$

El producto vectorial proporciona un vector normal al plano que contiene esos dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, -5).$$

Al pasar por $A(1, 0, 2)$, su ecuación general es

$$(x - 1) - y - 5(z - 2) = 0 \implies \boxed{x - y - 5z + 9 = 0}.$$

Para reflejar $D(1, 0, 4)$ respecto de ese plano, usamos que el pie de la perpendicular se obtiene proyectando sobre el vector normal $\vec{n} = (1, -1, -5)$. Si D' es el simétrico y $\delta = 1 - 0 - 5 \cdot 4 + 9 = -10$, entonces

$$D' = D - \frac{2\delta}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 0, 4) + \frac{20}{27}(1, -1, -5) = \boxed{\left(\frac{47}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{8}{27} \right)}.$$

Como comprobación, el punto medio es

$$M = \frac{D + D'}{2} = \left(\frac{37}{27}, -\frac{10}{27}, \frac{58}{27} \right), \quad \frac{37}{27} + \frac{10}{27} - 5 \cdot \frac{58}{27} + 9 = 0,$$

así que pertenece al plano. Además, $D' - D = \frac{20}{27}(1, -1, -5)$ es paralelo a su vector normal.