



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (5-x)e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

- a) Calcula $\int f(t) dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x = 1 + e^t$). **(1.5 puntos)**
- b) Se define $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -my + z = 1 \\ 5x + 2y + mz = 0 \\ my + (m-3)z = -3 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema en función de m . **(1.25 puntos)**
- b) Para $m = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y = 5$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,0,1)$, $B(-1,0,2)$ y $O(0,0,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

- a) Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(1.5 puntos)**
- b) Determina el área del triángulo de vértices A , B y O . **(1 punto)**



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1,$$

tiene un punto crítico en $x = 2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \text{ Calcula } a, b \text{ y } c.$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula $\int \cos(\ln x) dx$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de m para los que la ecuación $AX + B = C$ tiene solución única. **(1 punto)**
 b) Para $m = 0$, halla X tal que $AX + B = C$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 2)$.

- a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a π , paralelo a r y que pasa por el punto P . **(1.25 puntos)**
 b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (5-x)e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función.

$$f'(x) = (-1)e^{x-4} + (5-x)e^{x-4} = (4-x)e^{x-4}$$

Buscamos los puntos críticos de la derivada calculando su derivada ($f''(x)$) e igualándola a 0.

$$f''(x) = (-1)e^{x-4} + (4-x)e^{x-4} = (3-x)e^{x-4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (3-x)e^{x-4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x-4} = 0 \rightarrow \text{¡Im posible!} \\ 3-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=3} \end{cases}$$

Comprobamos si en $x = 3$ hay un máximo de la derivada viendo si la derivada tercera es positiva o negativa.

$$f'''(x) = (-1)e^{x-4} + (3-x)e^{x-4} = (2-x)e^{x-4} \Rightarrow f'''(3) = (2-3)e^{3-4} = -e^{-1} < 0$$

La pendiente de la recta tangente es máxima en $x = 3$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

a) Calcula $\int f(t) dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x = 1 + e^t$). **(1.5 puntos)**

b) Se define $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ **(1 punto)**

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{1+e^t} dt = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + e^t \rightarrow x - 1 = e^t \\ dx = e^t dt \\ dt = \frac{1}{e^t} dx = \frac{1}{x-1} dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{x} \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \dots$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \Rightarrow 1 = A(x-1) + Bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 1 = A(0-1) + 0 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1 \\ x=1 \rightarrow 1 = 0 + B \rightarrow B = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = -\ln(1+e^t) + \ln e^t =$$

$$= -\ln(1+e^t) + t = \boxed{t - \ln(1+e^t) + C}$$

b) Calculamos la expresión de $g(x)$.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \left[t - \ln(1+e^t) \right]_0^x = \left[x - \ln(1+e^x) \right] - \left[0 - \ln(1+e^0) \right] = x - \ln(1+e^x) + \ln 2$$

Pasamos a calcular el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+e^x) + \ln 2}{x} = \frac{0 - \ln(1+e^0) + \ln 2}{0} =$$

$$= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{e^x}{1+e^x} + 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -my + z = 1 \\ 5x + 2y + mz = 0 \\ my + (m-3)z = -3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función de m . **(1.25 puntos)**

b) Para $m = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y = 5$. **(1.25 puntos)**

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 0 & -m & 1 & 1 \\ 5 & 2 & m & 0 \\ 0 & m & m-3 & -3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 5m - 0 + 5m(m-3) - 0 = 5m + 5m^2 - 15m = 5m^2 - 10m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5m^2 - 10m = 0 \Rightarrow 5m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. Si $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

El sistema queda muy sencillo, intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} z = 1 \\ 5x + 2y = 0 \\ -3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 5x + 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 5x + 2y = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}y$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

El sistema queda muy sencillo, intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -2y + z = 1 \\ 5x + 2y + 2z = 0 \\ 2y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + 2y \\ 5x + 2y + 2z = 0 \\ 2y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 2(1 + 2y) = 0 \\ 2y - (1 + 2y) = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 2 + 4y = 0 \\ 2y - 1 - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ -1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Im posible!}$$

Nos queda una ecuación imposible, por lo que el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m = 0$ el sistema se ha resuelto en el apartado anterior y sus infinitas soluciones son:

$$x = -\frac{2}{5}\alpha; y = \alpha; z = 1; \alpha \in \mathbb{R}$$

Obtenemos la solución para $y = 5$.

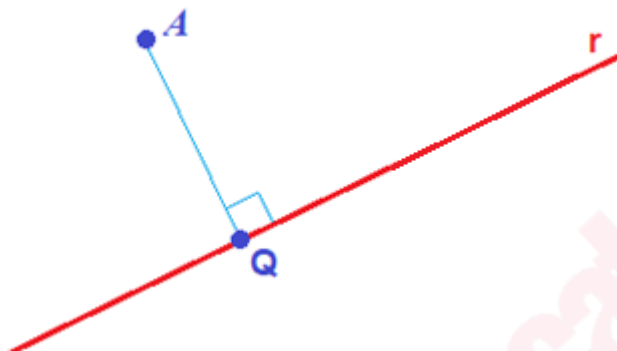
$$y = 5 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \cdot 5 = -2; z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,0,1)$, $B(-1,0,2)$ y $O(0,0,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

- a) Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(1.5 puntos)**
 b) Determina el área del triángulo de vértices A , B y O . **(1 punto)**

- a) Hallamos el punto Q del dibujo determinando el plano π perpendicular a la recta r y que contiene el punto A . Después hallamos el punto Q de corte de recta y plano.



El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$ es $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$

El plano π tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in \pi \\ \pi \equiv -x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \pi \equiv -x + y + 1 = 0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + y + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -(-1 - \lambda) + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - (-1) = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q(0, -1, 2) \end{aligned}$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ} = (0, -1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$$

$$\text{Distancia}(A, r) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO a)

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1, 0, 2) \in r \\ \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

Hallamos el producto vectorial de $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{AP}$ y determinamos la distancia.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (-1, 0, 2) - (1, 0, 1) = (-2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 2k + j = (1, 2, 1)$$

$$Dis\ tan\ cia(A, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{3}u}$$

b) Para determinar el área del triángulo de vértices A , B y O usamos la fórmula:

$$\text{Área } ABO = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (1, 0, 1) \\ \overrightarrow{OB} = (-1, 0, 2) - (0, 0, 0) = (-1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -j - 2j = -3j = (0, -3, 0)$$

$$\text{Área } ABO = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}u^2}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1,$$

tiene un punto crítico en $x = 2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \text{ Calcula } a, b \text{ y } c.$$

Si la función tiene un punto crítico en $x = 2$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a(2)^2 + 2b(2) + c = 12a + 4b + c \Rightarrow \boxed{12a + 4b + c = 0}$$

La pendiente de la recta normal en $x = 1$ es $-\frac{1}{f'(1)}$, como la recta normal es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ tiene

pendiente $\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 = f'(1) \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c \Rightarrow \boxed{-2 = 3a + 2b + c}.$$

La recta normal en $x = 1$ y la función en $x = 1$ deben coincidir.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1 \\ \text{Coinciden en } x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = a + b + c - 1 \Rightarrow 2 = a + b + c - 1 \Rightarrow \boxed{a + b + c = 3}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 12a + 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = -2 \\ a + b + c = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12a + 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = -2 \\ a = 3 - b - c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12(3 - b - c) + 4b + c = 0 \\ 3(3 - b - c) + 2b + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 12b - 12c + 4b + c = 0 \\ 9 - 3b - 3c + 2b + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -8b - 11c = -36 \\ -b - 2c = -11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -8b - 11c = -36 \\ b = 11 - 2c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(11 - 2c) - 11c = -36 \Rightarrow -88 + 16c - 11c = -36 \Rightarrow 5c = 52 \Rightarrow \boxed{c = \frac{52}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 11 - 2 \cdot \frac{52}{5} = 11 - \frac{104}{5} = \frac{-49}{5}} \Rightarrow \boxed{a = 3 + \frac{49}{5} - \frac{52}{5} = \frac{15 + 49 - 52}{5} = \frac{12}{5}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{12}{5}$, $b = \frac{-49}{5}$ y $c = \frac{52}{5}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula $\int \cos(\ln x) dx$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(\ln x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x \cos(\ln x) - \int x \left(-\operatorname{sen}(\ln x) \frac{1}{x} \right) dx = x \cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \operatorname{sen}(\ln x) \rightarrow du = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

Hemos obtenido que $\int \cos(\ln x) dx = -\operatorname{sen}(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$. Juntamos las dos integrales y determinamos el valor de la integral pedida.

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x) dx + \int \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \cos(\ln x) dx = \frac{x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)}{2} = \frac{x}{2} \cdot \cos(\ln x) + \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen}(\ln x) + C}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de m para los que la ecuación $AX + B = C$ tiene solución única. **(1 punto)**
 b) Para $m = 0$, halla X tal que $AX + B = C$. **(1.5 puntos)**

- a) Transformamos la ecuación en un sistema de ecuaciones: $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B$
 Para que tenga solución única la matriz A debe tener rango 3 y para ello el determinante de A debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3m - 3 - 2m(m-1) + 4m = 8 + 3m - 3 - 2m^2 + 2m + 4m$$

$$\begin{cases} |A| = -2m^2 + 9m + 5 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow -2m^2 + 9m + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-2)(5)}}{2(-2)} = \frac{-9 \pm 11}{-4} = \begin{cases} m = \frac{-9+11}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{-9-11}{-4} = \frac{-20}{-4} = 5 \end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de $-\frac{1}{2}$ y de 5 la ecuación $AX + B = C$ tiene solución única.

b) Para $m = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación.

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Calculamos la inversa de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y hallamos la expresión de la matriz X.

$$C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -16+8-6 \\ -6+8-6 \\ -4+2-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/5 \\ -4/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 2)$.

a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a π , paralelo a r y que pasa por el punto P . **(1.25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r . **(1.25 puntos)**

a) El plano π' perpendicular a π y paralelo a r tiene como vectores directores el vector normal del plano π y el vector director de la recta r .

$$\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -2, -1)$$

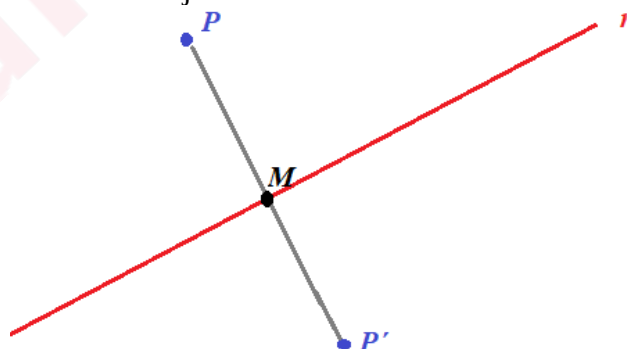
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ P(1, 1, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + y - 1 - 4(z - 2) + z - 2 + 2y - 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + y - 1 - 4z + 8 + z - 2 + 2y - 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + y - z = 0}$$

b) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta r .

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 1, 2) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, 1, 2) \in \pi \\ \pi \equiv x - 2y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - 2y - z + 3 = 0$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π .

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 3 + \lambda - 2(1 - 2\lambda) - (-2 - \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + \lambda - 2 + 4\lambda + 2 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 1 = 2 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = -2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(2, 3, -1)$$

El punto M tiene coordenadas $M(2, 3, -1)$.

El punto P' se obtiene al sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (2, 3, -1) - (1, 1, 2) = (1, 2, -3)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (2, 3, -1) + (1, 2, -3) = (3, 5, -4)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(3, 5, -4)$