

Convocatoria ordinaria de 2024

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

La recta por $A(1,0)$ y $B(e,1)$ tiene pendiente $1/e$. Como $f'(x) = 1/x$, la tangente es paralela a ella cuando $x = e$. El punto de tangencia es $(e, 1)$. En A , la pendiente tangente es 1, así que la normal tiene pendiente -1 y ecuación

$$y - 1 = \frac{x - e}{e}, \quad y = -x + 1 \text{ (normal en } A\text{)}.$$

Ejercicio 2

Para que exista continuidad en $x = 0$, el numerador del tramo izquierdo debe anular su término de primer orden. Usando $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ y $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$,

$$x \cos x - a \sin x = (1 - a)x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{a}{6}\right)x^3 + o(x^3).$$

Así, $a = 1$ y el límite por la izquierda es $-1/3$. El valor por la derecha es $b - 1$; igualando, $b = 2/3$. Por tanto,

$$a = 1, \quad b = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 3

Descomponemos el integrando mediante división y fracciones simples:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = x + \frac{3}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)}.$$

Una primitiva es $x^2/2 + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$. Al imponer $F(0) = 1$, resulta $C = 1$. La respuesta es

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + 1.$$

Ejercicio 4

Integramos $f''(x) = x \cos x$ dos veces por partes:

$$f'(x) = x \sin x + \cos x + C_1, \quad f(x) = -x \cos x + 2 \sin x + C_1 x + C_2.$$

La condición $f(0) = \pi/2$ da $C_2 = \pi/2$. La condición $f(\pi) = 2\pi$ da $C_1 = 1/2$. Así,

$$f(x) = -x \cos x + 2 \sin x + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 5

La matriz es $A = I + N$, donde N solo tiene $1/8$ en las posiciones $(1, 2)$ y $(1, 3)$; por ello $N^2 = 0$. El binomio da $A^n = I + nN$, y entonces

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $A^2XA + I = O$, multiplicamos por A^{-2} a la izquierda y A^{-1} a la derecha. Así, $X = -A^{-3}$. Como $A^{-3} = I - 3N$,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$(k-1)x = k-1.$$

Si $k \neq 1$, entonces $x = 1$. Con $z = 1 - y$, la tercera ecuación se reduce a $2 + (k-2)y = 0$. Para $k \neq 1, 2$, hay solución única

$$(x, y, z) = \left(1, -\frac{2}{k-2}, \frac{k}{k-2}\right).$$

Si $k = 2$, se obtiene la contradicción $2 = 0$, por lo que el sistema es incompatible. Si $k = 1$, solo quedan $y+z = 1$ y $x+z = 0$; sus rangos coinciden y valen $2 < 3$, así que es compatible indeterminado. Las soluciones son $(-t, 1-t, t)$. En particular, $y = 0$ cuando $t = 1$, que da $(-1, 0, 1)$.

Ejercicio 7

El director de r es $d = (2, 3, 1)$ y el normal de π es $n_\pi = (1, -1, 0)$. Para que un plano contenga r , su normal debe ser perpendicular a d ; para que además sea perpendicular a π , ese normal también debe ser perpendicular a n_π . Podemos tomar $n_\pi \times d = (-1, -1, 5)$. Con el punto $(1, 0, 2)$ de r , la ecuación del plano es $-x - y + 5z - 9 = 0$. La recta del apartado b) debe pasar por el origen y tener director perpendicular a d y contenido en π . Tomamos

$$n_\pi \times d = (-1, -1, 5),$$

que cumple ambas condiciones. La recta es

$$(x, y, z) = t(-1, -1, 5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8

El producto vectorial de $OA = (a, -1, 2)$ y $OB = (a, 1, 0)$ es $(-2, 2a, 2a)$, de módulo $2\sqrt{1+2a^2}$. El área es la mitad de ese módulo; al igualarla a 3 resulta $a^2 = 4$, es decir, $a = \pm 2$. Para que O, A, B, C sean coplanarios, el producto mixto debe anularse:

$$(OA \times OB) \cdot OC = (-2, 2a, 2a) \cdot (1, 1, 0) = 2a - 2 = 0.$$

Por tanto, $a = 1$.