

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.

Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?

¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:

Llamando: x = unidades fabricadas del producto A
 y = unidades fabricadas del producto B

Pasemos los minutos a horas, $30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$, $40 \text{ min.} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} h$.

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº unidades	Montar	Pintar	Coste
A	x	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	40€
B	y	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	35€

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

$$\text{“Cada día 10h para montar piezas”} \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 10 \rightarrow 3x + 4y \leq 60.$$

$$\text{“Cada día 11h para pintar piezas”} \rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 11 \rightarrow 4x + 3y \leq 66.$$

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dada por la función: $z = 40x + 35y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 40x + 35y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$(a) \quad 3x + 4y \leq 60$$

$$3x + 4y = 60$$

x	y
0	15
20	0

¿(0,0) cumple?

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 60 \quad \text{Sí}$$

$$(b) \quad 4x + 3y \leq 66$$

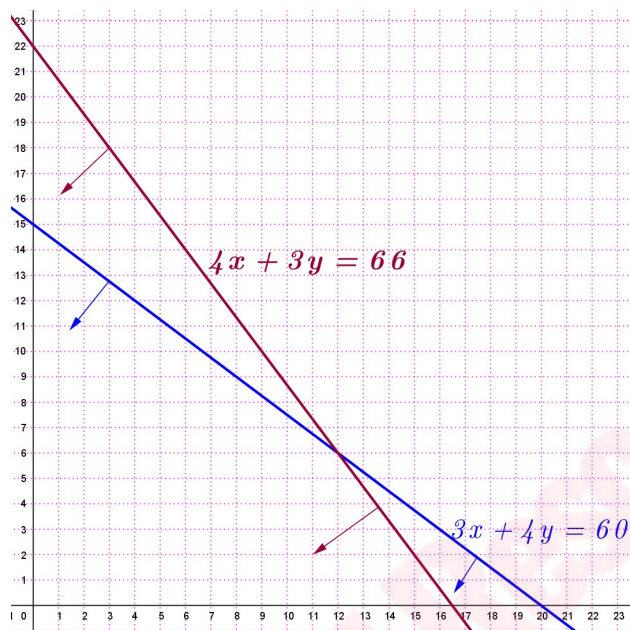
$$4x + 3y = 66$$

x	y
0	22
16'5	0

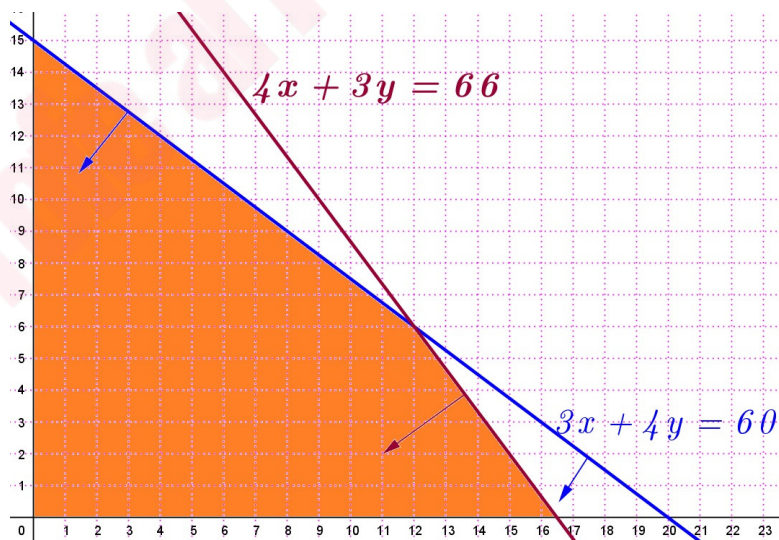
¿(0,0) cumple?

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 66 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 0)$, $B(0, 15)$ y $D(16'5, 0)$.

Pero este último no es de la región factible ($16'5 \notin \mathbb{N}$), tendremos que tomar el $(16, 0)$ y esperar que el máximo se alcance en el punto de corte de las dos rectas.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ 4x + 3y = 66 \end{cases} \quad \begin{matrix} 4x1^a \\ -3x2^a \end{matrix} \begin{cases} 12x + 16y = 240 \\ -12x - 9y = -198 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } 7y = 42 \quad y = \frac{42}{7} = 6$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $3x + 4 \cdot 6 = 60$; $3x + 24 = 60$; $3x = 60 - 24$

$$3x = 36; \quad x = \frac{36}{3} = 12.$$

Luego $C(12, 6)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 40x + 35y$	
$0, 0$	$40 \cdot 0 + 35 \cdot 0 = 0$	
$0, 15$	$40 \cdot 0 + 35 \cdot 15 = 525$	
$12, 6$	$40 \cdot 12 + 35 \cdot 6 = 690$	máximo
$16, 0$	$40 \cdot 16 + 35 \cdot 0 = 640$	

El máximo se alcanza en el punto $(12, 6)$

Por tanto,

**Para obtener el máximo ingreso cada día hay que producir 12 unidades del producto A y 6 del B.
Con esta producción el máximo ingreso será de 690€.**

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Luego } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 - 3}{0^2 + 0 - 2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \rightarrow (3, 0) \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con los ejes coordenados son: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

Luego la asíntota horizontal de $f(x)$ es $y = 1$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = -2$ y $x = 1$. Veámoslo,

$x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) - 3}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{5}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es A.V.}$$

$x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 - 3}{1^2 + 1 - 2} = \frac{-4}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es A.V.}$$

De la función su **asíntota horizontal** es $y = 1$ y sus **asíntotas verticales** son $x = -2$ y $x = 1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 + x - 2) - (x^2 - 2x - 3) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

Efectuemos las operaciones del numerador,

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ \otimes \quad 2x - 2 \\ \hline -2x^2 - 2x + 4 \\ 2x^3 + 2x^2 - 4x \\ \hline 2x^3 - 6x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 \\ \otimes \quad 2x + 1 \\ \hline +x^2 - 2x - 3 \\ 2x^3 - 4x^2 - 6x \\ \hline 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 6x + 4 \\ -2x^3 + 3x^2 + 8x + 3 \\ \hline 3x^2 + 2x + 7 \end{array}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x + 7}{(x^2 + x - 2)^2}$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, es positivo, por tanto el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. Busquemos las raíces del numerador,

$$3x^2 + 2x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6} \text{ no existe}$$

El numerador es un polinomio de 2º grado sin raíces y con coeficiente de x^2 positivo, por tanto el numerador es positivo. Obtenemos que $f'(x)$ es positiva, por tanto $f(x)$ es **creciente en su dominio**.

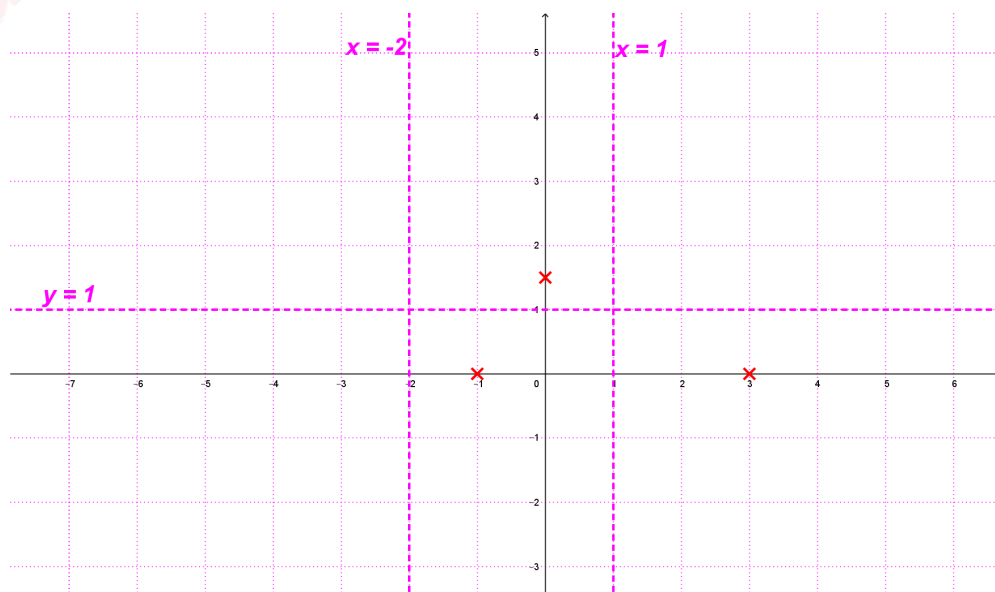
d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior, como $f(x)$ es creciente en su dominio, $f(x)$ **no tiene ni máximos ni mínimos locales**.

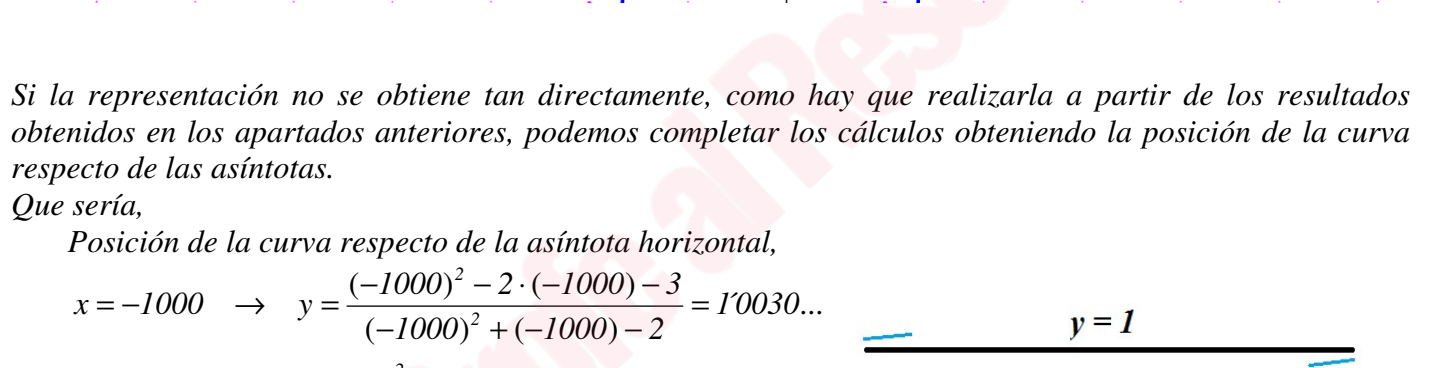
e) Representación gráfica.

Representemos los puntos de corte y asíntotas obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujando estos elementos:



Considerando que la función es creciente en su dominio, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Que sería,

$$x = -1000 \rightarrow y = \frac{(-1000)^2 - 2 \cdot (-1000) - 3}{(-1000)^2 + (-1000) - 2} = 1'0030...$$

$$y = 1$$

 $x = -2$

$$x = -2$$

$$x = -2$$

$$x = 1$$

$$x = 1$$

Clases de preparación para PAU, PCE, Selectividad +25 online, grupos reducidos, horarios flexibles.
Academia ONLINE de Matemáticas, Física y Química **tuprofealrescate.com**

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25% de los coches son de motor híbrido. El 20% son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15% de los de tipo Van y el 40% de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

- La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido. (2,5 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

V = coche de tipo Van H = coche híbrido
 U = coche de tipo Urban $\bar{H}$ = coche no híbrido
 S = coche de tipo Suv

Considerando todos los datos del enunciado,

“el 25% de los coches son híbridos” $\rightarrow P(H) = 0.25$ y $P(\bar{H}) = 1 - 0.25 = 0.75$

“el 20% son de tipo Van” $\rightarrow P(V) = 0.20$

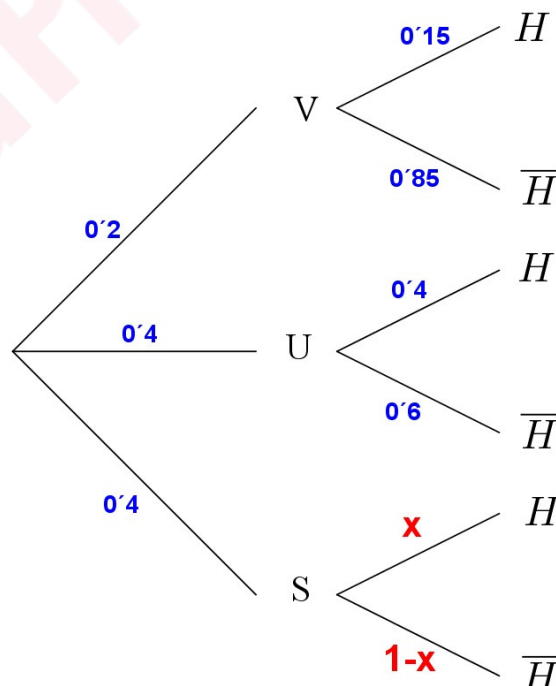
“el 40% son de tipo Urban” $\rightarrow P(U) = 0.40$

Como sólo hay tres modelos de coche, el resto, es decir, el 40% son de tipo Suv $\rightarrow P(S) = 0.40$

“el 15% de los de tipo Van son híbridos” $\rightarrow P(H/V) = 0.15$ y $P(\bar{H}/V) = 1 - 0.15 = 0.85$

“el 40% de los de tipo Urban son híbridos” $\rightarrow P(H/U) = 0.40$ y $P(\bar{H}/U) = 1 - 0.40 = 0.60$

El árbol del problema será:

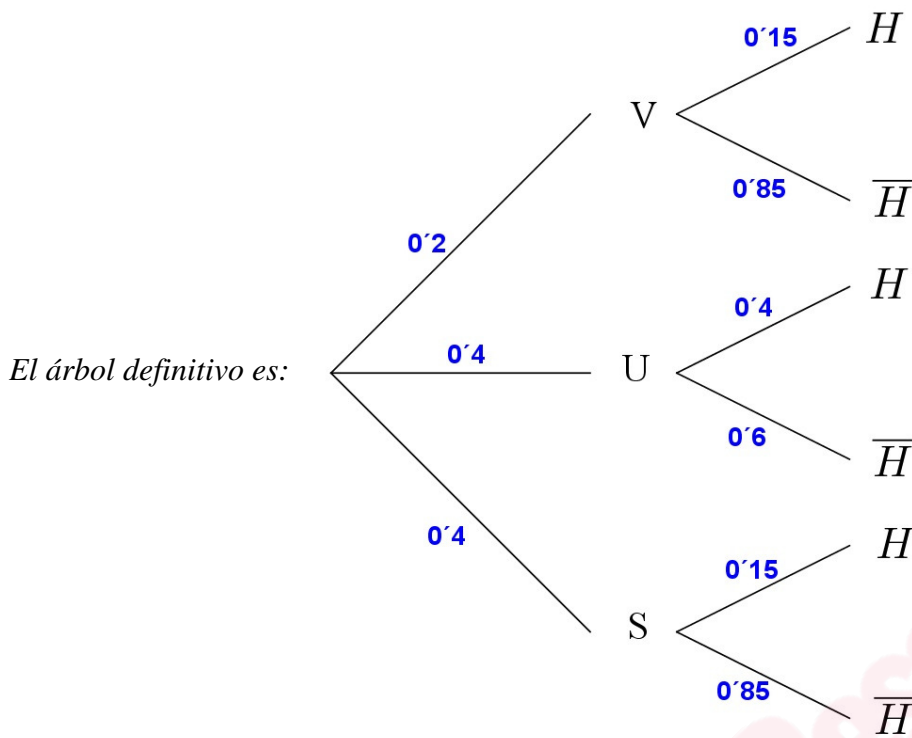


Determinamos el valor de x considerando que $P(H) = 0.25$

Del árbol, $P(H) = 0.2 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot x$

$$0'25 = 0'19 + 0'4x$$

$$0'06 = 0'4x \rightarrow x = \frac{0'06}{0'4} = 0'15$$



Respondamos las preguntas,

a) Probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

La probabilidad pedida es: $P\left(\frac{U}{H}\right)$

$$P\left(\frac{U}{H}\right) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{0'4 \cdot 0'4}{0'25} = 0'64$$

b) Probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

La probabilidad pedida es: $P\left(\frac{V}{\bar{H}}\right)$

$$P\left(\left(\frac{V}{\bar{H}}\right)\right) = \frac{P(V \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{0'2 \cdot 0'85}{0'75} = 0'2267$$

c) Probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

La probabilidad pedida es: $P\left(\frac{H}{S}\right)$

$$P\left(\frac{H}{S}\right) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{0'4 \cdot 0'15}{0'4} = 0'15$$

d) Probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Ni Van ni híbrido, por tanto debe ser Urban y no híbrido o Suv y no híbrido.

La probabilidad pedida es: $P(\bar{V} \cap \bar{H}) = P(U \cap \bar{H}) + P(S \cap \bar{H}) = 0'4 \cdot 0'6 + 0'4 \cdot 0'85 = 0'58$

Otra forma de calcular esta probabilidad:

$$P(\overline{V} \cap \overline{H}) = P(\overline{V \cup H}) = 1 - P(V \cup H)$$

$$P(V \cup H) = P(V) + P(H) - P(V \cap H) = 0.2 + 0.25 - 0.2 \cdot 0.15 = 0.42$$

$$\text{Finalmente, } P(\overline{V} \cap \overline{H}) = 1 - 0.42 = 0.58$$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A (3 puntos)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. (3 puntos)

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

Solución:

a) $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left\{ \text{sacando el factor } \frac{1}{3} \text{ de cada fila} \right\} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} (4 + 4 + 4 + 8 + 8 - 1) = \frac{1}{27} \cdot 27 = 1$$

Solución: $|A| = 1$.

b) ¿ A es ortogonal?

La matriz A es ortogonal si $\exists A^{-1}$ y $A^{-1} = A^t$

En el apartado anterior obtuvimos que $|A| = 1 \neq 0$, por lo tanto $\exists A^{-1}$.

Comprobemos que $A^{-1} = A^t$, lo haremos calculando $A \cdot A^t (= A \cdot A^{-1} = I)$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left\{ \text{sacamos el factor } \frac{1}{3} \text{ de las dos matrices} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{c.q.c.}$$

Solución: la matriz A es ortogonal.

c) Resolver el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Del apartado anterior sabemos que $A^{-1} = A^t$, luego

{utilizaremos la matriz A^t como la escribimos en el apartado b)}, es decir:

$$A^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{3}{5}$.

OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 2.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio. (2 puntos)
 b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. (3 puntos)
 c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

d) Calcula $\int_{-2}^1 f(x) dx$. (3 puntos)

Solución:En la definición de la función $f(x)$ hay dos ramas,para $x \leq 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 3$ y esta función se puede calcular para cualquier valor de x .para $x > 1$ $f(x) = \frac{a x^2}{x^2 + 1}$, como $x^2 + 1 > 0$ (para cualquier valor de x) el cociente se puede calcular.Por tanto $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

- a) ¿Valor de
- a
- para que
- $f(x)$
- sea continua en su dominio?

Para $x \leq 1$ $f(x)$ es un polinomio luego es continua.Para $x > 1$ $f(x)$ es un cociente con el denominador distinto de cero luego es continua.El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = 1$.Continuidad en $x = 1$,

a) $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a x^2}{x^2 + 1} = \frac{a \cdot 1^2}{1^2 + 1} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para que exista el límite } 1 = \frac{a}{2} \rightarrow a = 2$$

c) Para $a = 2$ $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

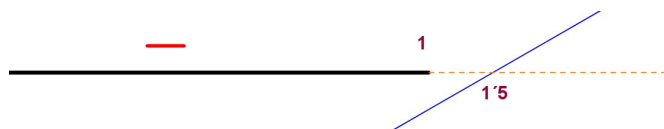
Solución: para que $f(x)$ sea continua en su dominio debe ser $a = 2$.

- b) Para
- $a = 2$
- ¿monotonía de
- $f(x)$
- ?

Como $f(x)$ tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.Primera rama, $y = x^2 - 3x + 3$, $x \leq 1$ $y' = 2x - 3$, estudiemos el signo de y' .

$$2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$$

 $y' = 2x - 3$ es una recta de pendiente positiva que pasa por $x = 1.5$, luego



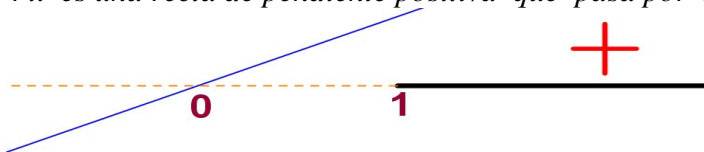
Segunda rama, $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$, $x > 1$

$$y' = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, es positivo; el signo de y' depende del numerador.

$$4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$4x$ es una recta de pendiente positiva que pasa por $x = 0$, luego



Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.

c) Para $a = 2$, asíntotas horizontales o verticales.

La rama polinómica de $f(x)$ no aporta asíntotas. Las posibles asíntotas estarán en la rama para $x > 1$.
Calculémoslas,

Asíntota vertical,

$\frac{2x^2}{x^2 + 1}$, como $x^2 + 1 > 0$, el denominador no se anula, por lo que no hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2) = 2, \text{ entonces } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Por tanto, $f(x)$ no tiene asíntota vertical y su asíntota horizontal es $y = 2$.

d) $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

En el intervalo $[-2, 1]$, $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) dx &= \int_{-2}^1 (x^2 - 3x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 3 \frac{(-2)^2}{2} + 3 \cdot (-2) \right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 6 - 6 \right) = \frac{33}{2} = 16'5 \end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{-2}^1 f(x) dx = 16'5$.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un estudiante acude a la universidad el 70% de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1% de las veces que acude andando, el 3% de las que lo hace en transporte público y el 6% de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

- La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente. (3 puntos)
- La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde. (3 puntos)
- La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente. (4 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

V = va en vehículo A = va andando T = va en transporte público

Del enunciado del problema se deduce que: $P(V) = 0.7$, $P(A) = x$ y $P(T) = 2x$

Como estos son los tres medios de transporte que usa, $0.7 + x + 2x = 1$; $3x = 1 - 0.7$; $3x = 0.3$;

$$x = \frac{0.3}{3} = 0.1$$

Luego, $P(V) = 0.7$, $P(A) = 0.1$ y $P(T) = 0.2$

Añadimos los sucesos: R = llega con retraso $\bar{R}$ = llega puntual

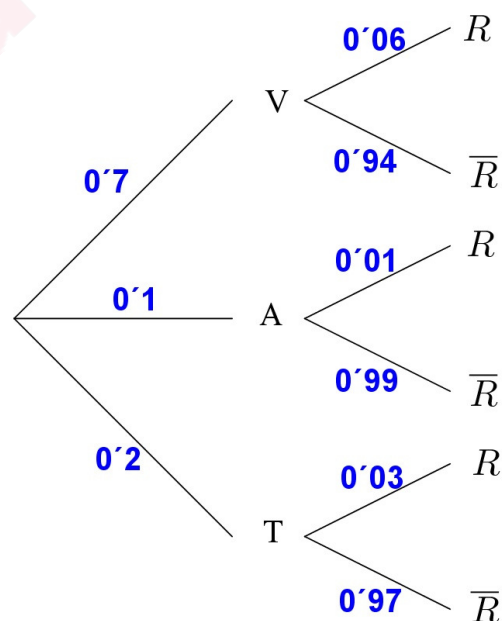
Considerando todos los datos del enunciado,

“el 1% de las veces que acude andando llega tarde” $\rightarrow P(R/A) = 0.01$

“el 3% de las que lo hace en transporte público” $\rightarrow P(R/T) = 0.03$

“el 6% de las que lo hace con su propio vehículo” $\rightarrow P(R/V) = 0.06$

El árbol del problema será:



a) Probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

La probabilidad pedida es: $P(\bar{R})$

$$P(\bar{R}) = 0.7 \cdot 0.94 + 0.1 \cdot 0.99 + 0.2 \cdot 0.97 = \mathbf{0.951}$$

b) Probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

La probabilidad pedida es: $P(T/R)$

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.2 \cdot 0.03}{0.049} = \frac{6}{49} = \underline{\underline{0.1224}}$$

$$P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - 0.951 = 0.049$$

c) Probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

La probabilidad pedida es: $P(\bar{A}/R)$

$$P(\bar{A}/R) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \left\{ \text{Leyes de Morgan } \bar{A} \cap \bar{R} = \overline{A \cup R} \right\} \frac{P(\overline{A \cup R})}{P(\bar{R})} = \frac{1 - P(A \cup R)}{P(\bar{R})} = \frac{1 - 0.148}{0.951} = \underline{\underline{0.8959}}$$

$$\text{cálculo de } P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R) = 0.1 + 0.049 - 0.1 \cdot 0.01 = 0.148$$

De otra forma.

Si no ha ido andando, ha ido en vehículo o en transporte público. Por tanto:

$$P(\bar{A}/R) = P(V/R) + P(T/R) = \frac{P(V \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} + \frac{P(T \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0.7 \cdot 0.94}{0.951} + \frac{0.2 \cdot 0.97}{0.951} = \underline{\underline{0.8959}}$$