

El examen pide responder tres problemas; se desarrollan los seis para ofrecer una solución completa.

Problema 1 · Producción de juguetes artesanales

Sean x , y y z las cantidades de camiones, marionetas y rompecabezas. El número total, la madera empleada y las horas de trabajo dan el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 89, \\ 2x + 0,5y + 0,8z = 91, \\ 3x + 4y + 3,5z = 313. \end{cases}$$

Usamos la primera ecuación para escribir $z = 89 - x - y$ y sustituimos en las otras dos:

$$2x + 0,5y + 0,8(89 - x - y) = 91 \implies 4x - y = 66,$$

$$3x + 4y + 3,5(89 - x - y) = 313 \implies y - x = 3.$$

De $y = x + 3$ y $y = 4x - 66$ resulta $x = 23$, $y = 26$. Por tanto, $z = 89 - 23 - 26 = 40$. Estas cantidades satisfacen las condiciones de madera y tiempo.

23 camiones, 26 marionetas, 40 rompecabezas.

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. El denominador se anula en $x = 1$, por lo que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

El numerador se anula en $x = 0$, que también da el corte con el eje Y : $(0, 0)$. La asíntota vertical se comprueba con los límites

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty;$$

por tanto, es $x = 1$. Dividiendo,

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

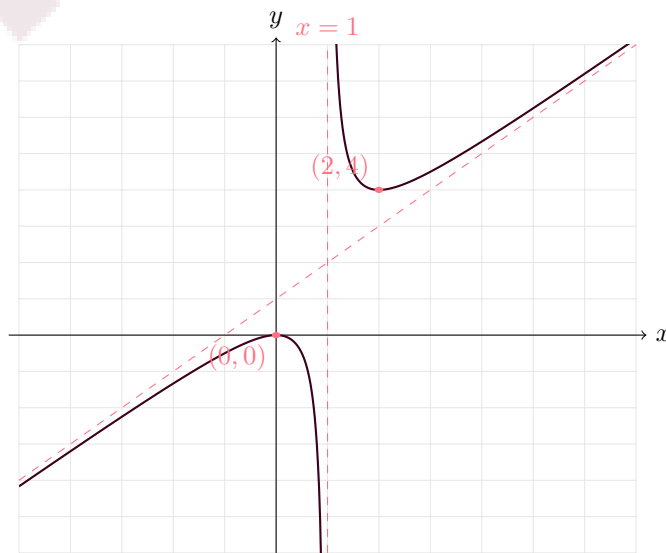
El último término tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que la asíntota oblicua es $y = x + 1$ y no hay asíntota horizontal.

La derivada permite estudiar crecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Los valores que dividen la recta son 0, 1 (fuera del dominio) y 2. El denominador es positivo; al probar $x = -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3$, los signos de f' son $+, -, -, +$. Luego, f crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$, y decrece en $(0, 1)$ y $(1, 2)$. En $x = 0$ pasa de crecer a decrecer y en $x = 2$ de decrecer a crecer:

$$f(0) = 0 \quad (\text{máximo local}), \quad f(2) = 4 \quad (\text{mínimo local}).$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad x = 1, y = x + 1; \quad \max_{\text{loc}} f = (0, 0), \min_{\text{loc}} f = (2, 4).$$

Problema 3 · Relación entre dos sucesos

Los datos son $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,8$ y $P(A^c \cup B^c) = 0,7$. Por De Morgan, $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$, así que

$$P(A \cap B) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

a) Si fueran independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Primero hallamos $P(B)$ usando la unión:

$$0,8 = 0,4 + P(B) - 0,3 \implies P(B) = 0,7.$$

Como $0,3 \neq 0,4(0,7) = 0,28$, no son independientes. b) El suceso «exactamente uno» es la unión de A y B excluyendo su intersección:

$$\begin{aligned} P(\text{sólo uno}) &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0,4 + 0,7 - 2(0,3) = 0,5. \end{aligned}$$

c) $P(B^c) = 1 - P(B) = 0,3$. d) La intersección $A^c \cap B$ tiene probabilidad $P(B) - P(A \cap B) = 0,4$. Por tanto,

$$P(A^c | B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{a) No son independientes; b) } 0,5; \text{ c) } P(B^c) = 0,3; \text{ d) } \frac{4}{7}.$$

Problema 4 · Productos e inversas de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos primero el producto:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 7.$$

Su determinante no es cero, por lo que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sumamos C y AB elemento a elemento:

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Como $\det C = 1$, su inversa es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

En cambio,

$$(C + AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Las dos matrices no son iguales: por ejemplo, sus entradas superiores izquierdas son $3/7$ y 1 .

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} + (AB)^{-1} \neq (C + AB)^{-1}.$$

Problema 5 · Beneficio del alquiler de bicicletas

La función de beneficios es $f(x) = 350x - x^2 - 15000$, donde x es el número de bicicletas alquiladas y $0 \leq x \leq 350$. Completamos el cuadrado:

$$f(x) = -(x - 175)^2 + 15625.$$

a)-b) La forma de vértice muestra que el beneficio máximo se obtiene alquilando 175 bicicletas y es 15 625 €. **c)** Para saber cuándo hay beneficios, resolvemos $f(x) > 0$. Las raíces son

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{350^2 - 4(15000)}}{2} = \frac{350 \pm 250}{2}, \text{ es decir, } 50 \text{ y } 300.$$

Como la parábola abre hacia abajo, $f(x) > 0$ cuando $50 < x < 300$. Si el número de bicicletas debe ser entero, esto corresponde a 51–299 bicicletas. **d)** Sí. Para más de 300 alquileres el beneficio vuelve a ser negativo, hasta el máximo disponible de 350 bicicletas.

Máximo 15 625 € con 175 bicicletas; hay beneficio si $50 < x < 300$.

Problema 6 · Suscripción y tamaño de los hogares

Sean M el suceso «hogar de más de una persona» y C el suceso «suscrito a Panoramix». Se conocen $P(M) = 0,8$, $P(C) = 0,3$ y $P(M \cap C) = 0,2$. **a)** La probabilidad de no estar suscrito es $P(C^c) = 1 - P(C) = 0,7$.

b) Un hogar de una persona suscrito al canal pertenece a $M^c \cap C$:

$$P(M^c \cap C) = P(C) - P(M \cap C) = 0,3 - 0,2 = 0,1.$$

c) Como $P(M^c) = 0,2$,

$$P(C | M^c) = \frac{P(M^c \cap C)}{P(M^c)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}.$$

d)

$$P(M | C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}.$$

a) 0,7; **b)** 0,1; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}$.