

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Producción de cajas de bombones

Cada caja EXTRA aporta $15(0,50) + 30(0,40) = 19,50$ euros de beneficio, y cada caja DELUXE aporta $30(0,50) + 15(0,40) = 21$ euros. Si x e y son las cajas EXTRA y DELUXE, respectivamente, la función de beneficio es

$$B(x, y) = 19,5x + 21y.$$

La disponibilidad de bombones impone las restricciones

$$15x + 30y \leq 450 \iff x + 2y \leq 30, \quad 30x + 15y \leq 450 \iff 2x + y \leq 30,$$

además de $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Como se trata de maximizar una función lineal en una región poligonal, basta evaluar el beneficio en sus vértices. Estos son $(0, 0)$, $(15, 0)$, $(10, 10)$ y $(0, 15)$; el punto de cruce se obtiene resolviendo $x + 2y = 30$, $2x + y = 30$.

(x, y)	$(0, 0)$	$(15, 0)$	$(10, 10)$	$(0, 15)$
$B(x, y)$	0	292,5	405	315

El mayor beneficio se alcanza vendiendo 10 cajas de cada clase.

$$x = 10, \quad y = 10, \quad B_{\max} = 405 \text{ €}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$. Su denominador se anula en $x = 2$, por lo que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Para cortar el eje X debe anularse el numerador: $x = 1$, de donde resulta $(1, 0)$. En el eje Y tomamos $x = 0$ y obtenemos $f(0) = -\frac{1}{4}$, así que el otro corte es $(0, -\frac{1}{4})$.

La recta $x = 2$ puede ser una asíntota vertical. Como el numerador tiende a 1 y el denominador a 0 por valores positivos,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty,$$

por lo que $x = 2$ es asíntota vertical. El grado del denominador es mayor que el del numerador, y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

la asíntota horizontal es $y = 0$ en ambos extremos.

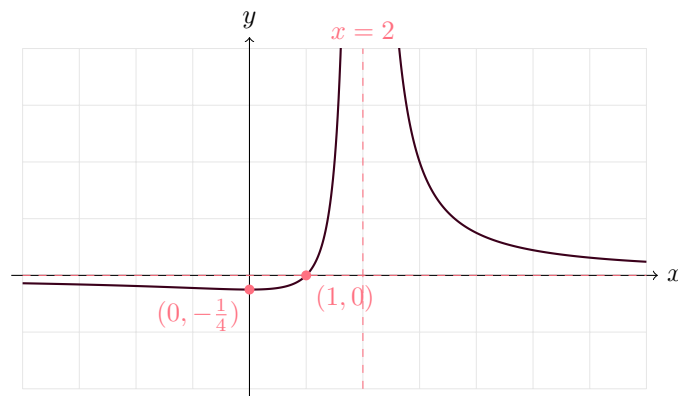
Para estudiar la monotonía derivamos en cada intervalo del dominio:

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - 2(x-1)(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{x}{(x-2)^3}.$$

Los valores que separan intervalos son el punto crítico $x = 0$ y el punto $x = 2$, excluido del dominio. Si probamos $x = -1, 1, 3$, respectivamente, obtenemos signos $f' < 0$, $f' > 0$ y $f' < 0$. Por tanto, f decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. En $x = 0$ la derivada cambia de negativa a positiva, de modo que hay un mínimo local:

$$f(0) = -\frac{1}{4}.$$

La gráfica recoge los cortes, el mínimo y las asíntotas halladas.



Problema 3 · Compras con tarjeta y cuantía

Sean T el suceso «se paga con tarjeta» y S el suceso «la compra supera 500 €». Los datos son $P(T) = 0,68$, $P(S) = 0,15$ y $P(T \cap S) = 0,05$.

a) «No supera 500 € y se paga en efectivo» es $\bar{S} \cap \bar{T}$, el complementario de $S \cup T$. Por la fórmula de la unión,

$$P(\bar{S} \cap \bar{T}) = 1 - P(S \cup T) = 1 - [P(S) + P(T) - P(S \cap T)] = 1 - (0,15 + 0,68 - 0,05) = 0,22.$$

b) Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\bar{S} | \bar{T}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,22}{1 - 0,68} = \frac{11}{16}.$$

c) De las compras que no superan 500 €, las pagadas con tarjeta tienen probabilidad conjunta $P(T \cap \bar{S}) = 0,68 - 0,05 = 0,63$. Así,

$$P(T | \bar{S}) = \frac{P(T \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0,63}{0,85} = \frac{63}{85}.$$

a) 0,22;	b) $\frac{11}{16}$;	c) $\frac{63}{85}$.
----------	----------------------	----------------------

Opción B

Problema 1 · Ecuaciones matriciales

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos el determinante para saber si existe la inversa:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como es distinto de cero, A es invertible. Su matriz adjunta es la traspuesta de la matriz de cofactores, por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Primero calculamos el segundo miembro de $Ax = B^t c$:

$$B^t c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por A^{-1} a la izquierda para despejar x :

$$x = A^{-1} B^t c = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Superficie deshelada

La superficie, en km^2 , viene dada por $f(t) = \frac{10t + 21}{t + 3}$, donde $t \geq 0$ representa los días desde el impacto. La reescritura

$$f(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}$$

facilita el cálculo y el estudio de la función. **a)** Sustituimos el número de días:

$$f(6) = 10 - \frac{9}{9} = 9 \text{ km}^2, \quad f(87) = 10 - \frac{9}{90} = \frac{99}{10} = 9,9 \text{ km}^2.$$

b) Como $t + 3 > 0$ en el dominio, la derivada es

$$f'(t) = \frac{9}{(t + 3)^2} > 0.$$

Así, la superficie deshelada crece durante todo el tiempo considerado. **c)** La función propuesta por el otro científico es $g(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}$, que coincide con la expresión obtenida para $f(t)$. Por tanto, ambas describen la misma superficie. **d)** Al crecer t , el término $9/(t + 3)$ tiende a cero:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 10 \text{ km}^2.$$

La extensión se aproxima a 10 km^2 sin alcanzarlos, pues $9/(t + 3) > 0$ para todo $t \geq 0$.

$$f(6) = 9 \text{ km}^2; \quad f(87) = 9,9 \text{ km}^2; \quad f \text{ crece y tiende a } 10 \text{ km}^2.$$

Problema 3 · Llaveros y apertura del trastero

Elegimos al azar uno de los llaveros, por lo que cada color tiene probabilidad $1/3$. Si un llavero contiene n llaves y solo una abre la puerta, una llave elegida al azar la abre con probabilidad $1/n$.

a) Sumamos las probabilidades de los tres casos incompatibles:

$$P(\text{abre a la primera}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{180}.$$

b) Aplicamos Bayes: la probabilidad de haber escogido el llavero verde y abrir a la primera, dividida por la probabilidad total de abrir a la primera, es

$$P(\text{verde} \mid \text{abre a la primera}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47}.$$

c) Para un llavero con n llaves, la probabilidad de fallar con la primera y acertar con una segunda distinta es

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Al promediar para los tres llaveros se obtiene el mismo valor que en el apartado a):

$$P(\text{falla la primera y acierta la segunda}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{180}.$$

$$\text{a) } \frac{47}{180}; \quad \text{b) } \frac{20}{47}; \quad \text{c) } \frac{47}{180}.$$