

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria coincidente de 2025

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Álgebra

1.1) Número de animales de cada tipo

Sean x , y y z los números de conejos, gallinas y pavos, respectivamente. Expresamos todos los costes en céntimos para evitar decimales. El coste total y las dos relaciones entre animales dan el sistema

$$\begin{cases} 150x + 4y + 30z = 4400, \\ y = 4z + \frac{x}{4}, \\ 2y = 11x + z. \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones eliminamos y :

$$2\left(4z + \frac{x}{4}\right) = 11x + z \implies 8z + \frac{x}{2} = 11x + z \implies 2z = 3x.$$

Así, $z = \frac{3}{2}x$ y, al sustituirlo en la relación de las gallinas,

$$y = 4\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{x}{4} = \frac{25}{4}x.$$

Introducimos estas expresiones en el coste total:

$$150x + 4\left(\frac{25}{4}x\right) + 30\left(\frac{3}{2}x\right) = 4400 \implies 220x = 4400 \implies x = 20.$$

Por tanto, $y = 125$ y $z = 30$; las cantidades son enteras y satisfacen las relaciones del enunciado. **Conclusión.** En la granja hay 20 conejos, 125 gallinas y 30 pavos.

1.2 a) Valores de a para que $\text{rang}(AB) = 3$

Una matriz cuadrada de orden 3 tiene rango 3 exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Además, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, por lo que calculamos ambos determinantes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a-6), \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-3a.$$

En consecuencia,

$$\det(AB) = a(a-6)(1-3a).$$

Este producto es distinto de cero si y solo si ninguno de sus factores se anula. **Conclusión.** $\text{rang}(AB) = 3$ para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6, \frac{1}{3}\}$.

1.2 b) Inversa de B

La matriz B es invertible cuando su determinante no se anula, es decir, si $a \neq \frac{1}{3}$. La primera matriz 2×2 de B tiene determinante $1-3a$ y la tercera coordenada permanece independiente. Aplicando la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-3a} & -\frac{3}{1-3a} & 0 \\ \frac{a}{1-3a} & \frac{1}{1-3a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq \frac{1}{3}.$$

Conclusión. La inversa existe para $a \neq \frac{1}{3}$ y viene dada por la matriz anterior.

Pregunta 2 - Análisis

2.1 a) Límite de $f(x) - g(x)$ en $x = 1$

Al sustituir $x = 1$, las dos funciones divergen; para comparar sus términos principales, hacemos el cambio $h = x - 1$. Entonces $e^x - e = e(e^h - 1)$ y

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{e^h - 1} - \frac{1}{h} = \frac{h - (e^h - 1)}{h(e^h - 1)}.$$

El cociente es de tipo $0/0$. Aplicamos la regla de L'Hôpital una vez:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{e^h - 1 + he^h},$$

que sigue siendo de tipo $0/0$. Aplicándola de nuevo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-e^h}{2e^h + he^h} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = -\frac{1}{2}.$

2.1 b) Crecimiento y decrecimiento de f

La función

$$f(x) = \frac{e}{e^x - e}$$

está definida cuando el denominador no es cero. Como $e^x = e$ si y solo si $x = 1$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Para estudiar el crecimiento, calculamos la derivada:

$$f'(x) = -\frac{e e^x}{(e^x - e)^2}.$$

El numerador es positivo y el denominador también, así que $f'(x) < 0$ en todo su dominio. El punto excluido $x = 1$ separa el dominio en dos intervalos, y la función decrece en cada uno de ellos. **Conclusión.** f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$; no tiene extremos relativos en su dominio.

2.1 c) Asíntotas de $g(x) + g(-x)$

Sumamos las dos expresiones y reducimos a una sola fracción:

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{-x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}, \quad x \neq \pm 1.$$

El dominio excluye $x = -1$ y $x = 1$. Estudiamos los límites laterales en esos puntos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x^2-1} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2-1} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x^2-1} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x^2-1} &= -\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Para $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2-1} = 0,$$

así que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos. Al existir asíntota horizontal, no hay oblicua. **Conclusión.** Las asíntotas son $x = -1$, $x = 1$ y $y = 0$.

2.2 a) Área limitada por la parábola y el eje OX

Los cortes con el eje OX se obtienen resolviendo $-x^2 + 4 = 0$, es decir, $x = -2$ y $x = 2$. Entre esos puntos, la función es no negativa, de modo que el área coincide con la integral de f :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas.

2.2 b) Rectángulo inscrito de área máxima

Por simetría de la parábola, los vértices superiores del rectángulo están en $(x, 4 - x^2)$ y $(-x, 4 - x^2)$, con $0 \leq x \leq 2$. Así, su base mide $2x$ y su altura es $4 - x^2$. El área que queremos maximizar es

$$S(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3.$$

Buscamos los puntos críticos dentro del dominio:

$$S'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \implies x = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

pues x debe ser no negativo. Además, $S(0) = S(2) = 0$ y

$$S''(x) = -12x < 0 \quad \text{en } (0, 2),$$

por lo que el punto crítico proporciona el máximo. La base y la altura son

$$2x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

El área máxima resulta

$$S_{\max} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{9}.$$

Conclusión. El rectángulo de área máxima mide $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ unidades de base y $\frac{8}{3}$ de altura; su área es $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ unidades cuadradas.

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

3.1 a) Distancia de r al plano π

La recta del enunciado, con denominador 0 en la coordenada y , se expresa en forma paramétrica como

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y el vector normal de $\pi : x + 2y - 2z - 1 = 0$ es $\vec{n} = (1, 2, -2)$. Como

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 = 0,$$

la recta es paralela al plano. Por ello, la distancia entre ambos objetos es la distancia de cualquier punto de r al plano. Tomamos $P = (1, 0, 2)$ y aplicamos

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

donde $(A, B, C, D) = (1, 2, -2, -1)$:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Conclusión. La distancia de r al plano π es $\frac{4}{3}$ unidades.

3.1 b) Proyección ortogonal de A sobre r

La proyección H está en r y el vector $\overrightarrow{AH}$ es perpendicular al vector director $\vec{u} = (2, 0, 1)$. Si $P_0 = (1, 0, 2)$ es un punto de la recta, el parámetro de la proyección se calcula mediante

$$t_H = \frac{(A - P_0) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Con $A = (1, 2, 3)$ y $P_0 = (1, 0, 2)$,

$$t_H = \frac{(0, 2, 1) \cdot (2, 0, 1)}{2^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{5}.$$

Por tanto,

$$H = P_0 + t_H \vec{u} = (1, 0, 2) + \frac{1}{5}(2, 0, 1) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5}\right).$$

Conclusión. La proyección ortogonal de A sobre r es $H = (\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5})$.

3.1 c) Volumen del tetraedro determinado por el plano

El plano buscado es paralelo a π , así que conserva su vector normal y tiene ecuación

$$x + 2y - 2z + D = 0.$$

Como pasa por $A(1, 2, 3)$,

$$1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + D = 0 \implies D = 1.$$

Sus cortes con los ejes se obtienen anulando las otras dos coordenadas:

$$P = (-1, 0, 0), \quad Q = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right), \quad R = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

El volumen del tetraedro con vértice en el origen es una sexta parte del valor absoluto del determinante de los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$:

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Conclusión. El volumen del tetraedro es $\frac{1}{24}$ unidades cúbicas.

3.2 a) Punto del segmento con distancias en razón 2 : 1

Parametrizamos el segmento desde A hasta B :

$$P(t) = A + t(B - A) = (t, 1 - t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, las distancias a los extremos son

$$AP = t\|\overrightarrow{AB}\| = t\sqrt{3}, \quad PB = (1 - t)\|\overrightarrow{AB}\| = (1 - t)\sqrt{3}.$$

La condición $AP = 2PB$ da

$$t\sqrt{3} = 2(1 - t)\sqrt{3} \implies t = \frac{2}{3}.$$

Sustituyendo este parámetro en la expresión del punto:

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Conclusión. Un punto que cumple la condición es $P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.2 b) Plano perpendicular al segmento por su punto medio

El vector director del segmento es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 0, 0 - 1, 1 - 0) = (1, -1, 1).$$

Este vector es normal a cualquier plano perpendicular al segmento. El punto medio es

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Usando la forma punto-normal, la ecuación del plano queda

$$(1, -1, 1) \cdot \left((x, y, z) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = 0,$$

y, al desarrollar,

$$x - y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano pedido es $2x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Pregunta 4 - Probabilidad

a) Comprobar la afirmación del usuario

El porcentaje de trenes con retraso superior a una hora es el que resta después de sumar los otros dos grupos:

$$p = 1 - 0,80 - 0,15 = 0,05.$$

Sea X el número de retrasos superiores a una hora en los cuarenta trayectos. Modelamos cada trayecto como un ensayo de Bernoulli, con probabilidad $p = 0,05$ de retraso superior a una hora; por tanto,

$$X \sim \text{Bin}(40, 0,05).$$

El usuario indica que tuvo exactamente diez retrasos de ese tipo, así que calculamos la probabilidad binomial de exactamente diez éxitos:

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= \binom{40}{10} (0,05)^{10} (0,95)^{30} \\ &\approx 0,0000178 = 1,78 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Una probabilidad de una entre un millón es $10^{-6} = 0,000001$. Como $1,78 \cdot 10^{-5} > 10^{-6}$, el suceso es más probable que lo que afirma el usuario. **Conclusión.** El usuario no ha hecho bien el cálculo: obtener exactamente diez retrasos tiene probabilidad aproximada $1,78 \cdot 10^{-5}$, superior a una entre un millón.

b) Reembolsos en enero aproximando por una normal

En cada trayecto la compañía devuelve dinero si el retraso es de al menos treinta minutos. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de los dos grupos con reembolso:

$$p = 0,15 + 0,05 = 0,20.$$

Enero tiene 31 días y se realizan 6 trayectos diarios, por lo que se consideran $n = 6 \cdot 31 = 186$ trayectos. Si X cuenta los trayectos que generan un reembolso,

$$X \sim \text{Bin}(186, 0,20), \quad \mu = np = 37,2, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{186 \cdot 0,20 \cdot 0,80} \approx 5,455.$$

Como $np = 37,2 > 5$ y $n(1-p) = 148,8 > 5$, aproximamos la binomial mediante la normal $Y \sim N(37,2, 5,455)$. Una sexta parte de los trayectos son $186/6 = 31$; «como mucho» significa $X \leq 31$. Aplicamos la corrección de continuidad:

$$\begin{aligned} P(X \leq 31) &\approx P(Y \leq 31,5) \\ &= P\left(Z \leq \frac{31,5 - 37,2}{5,455}\right) = P(Z \leq -1,04) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,04) = 1 - 0,8508 = 0,1492. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad aproximada de que haya reembolsos en como máximo 31 de los trayectos es 0,1492, es decir, un 14,92 %.