

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y kenia, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = porcentaje de café colombiano

y = porcentaje de café brasileño

z = porcentaje de café kenia

Del enunciado del problema obtenemos:

	Porcentaje de kg.	
café colombiano	x	10 €/kg
café brasileño	y	6 €/kg
café kenia	z	8 €/kg
Paquete	1	8'50 €/paquete

Y las ecuaciones serán:

Por la composición del paquete, $x + y + z = 1$

Por el valor del café, $10x + 6y + 8z = 8'50$

La cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, $x = 3y$; $x - 3y = 0$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8'5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8'5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 8F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0'5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 1'5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0'5 \\ -2 & 0 & 0 & -0'75 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow -2x = -0'75 \rightarrow x = \frac{-0'75}{-2} = 0'375, \quad x = 37'5\%$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 2x - 2y = 0'5 \text{ sustituyendo el valor de } x \rightarrow$$

$$2 \cdot 0'375 - 2y = 0'5; \quad 0'75 - 2y = 0'5; \quad 0'75 - 0'5 = 2y; \quad 0'25y = 2 \rightarrow$$

$$y = \frac{0'25}{2} = 0'125, \quad y = 12'5\%$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 1 \text{ sustituyendo los valores de } x \text{ e } y \rightarrow$$

$$0'375 + 0'125 + z = 1; \quad 0'5 + z = 1; \quad z = 1 - 0'5 = 0'5; \quad z = 50\%$$

Solución: en la mezcla hay que utilizar un 37'5% de café colombiano, un 12'5% de café brasileño y un 50% de café kenia.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcula la inversa de la matriz $A - B$. (3 puntos)
- Calcula la matriz X de dimensión 2×3 , que satisface la ecuación $XA + C = XB$. (4 puntos)
- ¿Es posible hacer el producto BC ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Solución:

a) Cálculo de $(A - B)^{-1}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } |A - B|, \quad |A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ existe $(A - B)^{-1}$. Procedamos a su cálculo,

$$A - B \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A - B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $XA + C = XB$

Veamos si podemos despejar X ,

$$XA - XB = -C; \quad X(A - B) = -C$$

Como existe $(A - B)^{-1}$, multiplicando por la derecha por $(A - B)^{-1}$, $X(A - B)(A - B)^{-1} = -C(A - B)^{-1}$

$$\text{Como } (A - B)(A - B)^{-1} = I, \quad XI = -C(A - B)^{-1} \rightarrow X = -C(A - B)^{-1}$$

Procedamos al cálculo de X ,

$$C(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = -C(A-B)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

c) ¿Es posible hacer el producto $B C$?

B es una matriz 3×3 y C es 2×3 , el producto $B C$ no puede realizarse porque el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de C (2).

¿Es posible hacer el producto $C B$?

C es una matriz 2×3 y B es 3×3 , el producto $C B$ puede efectuarse porque n° de columnas de $C = n^\circ$ de filas de $B = 3$ y el resultado será una matriz 2×3 .

$$C B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } C B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+6}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \left(0, \frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \rightarrow x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \rightarrow \begin{cases} (-6, 0) \\ (6, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0, \frac{9}{2}\right)$, $(-6, 0)$ y $(6, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

, la asíntota horizontal es $y = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = -2$ y $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} = \frac{-32}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4^2 - 36}{4^2 - 2 \cdot 4 - 8} = \frac{-20}{0} = \infty \rightarrow x = 4 \text{ es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $y = 1$ y las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 4$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 2x - 8) - (x^2 - 36) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 2x^3 + 2x^2 + 72x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-2x^2 + 56x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

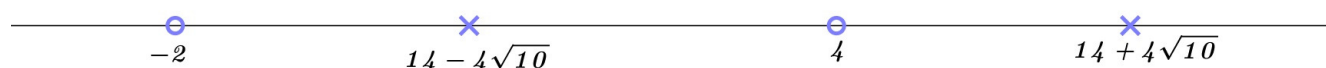
Obtenemos las raíces del numerador y denominador,

$$-2x^2 + 56x - 72 = 0 \rightarrow x = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-56 \pm 16\sqrt{10}}{-4} = 14 \pm 4\sqrt{10} =$$

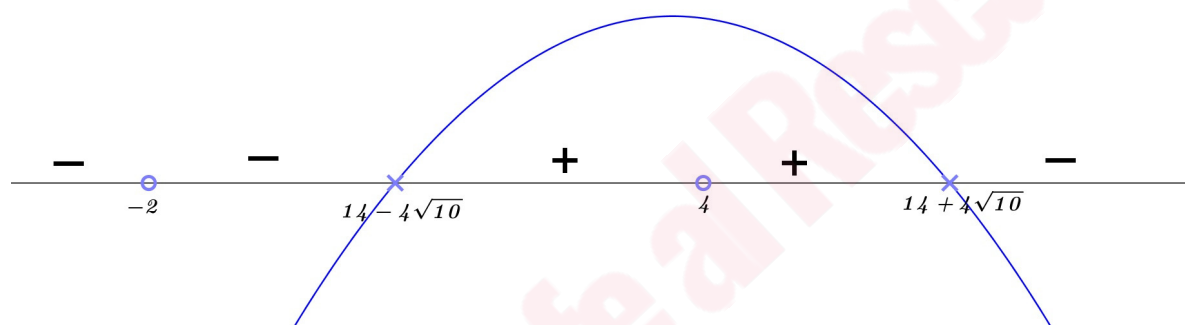
$$= \begin{cases} x_1 = 14 - 4\sqrt{10} \cong 1'3509 \\ x_2 = 14 + 4\sqrt{10} \cong 26'6491 \end{cases}$$

$$(x^2 - 2x - 8)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = -2 \text{ y } 4$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\{-2, 4\} \notin \text{Dom } f(x))$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $14 \pm 4\sqrt{10}$, luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(14 - 4\sqrt{10}, 4) \cup (4, 14 + 4\sqrt{10})$ y

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 14 - 4\sqrt{10}) \cup (14 + 4\sqrt{10}, +\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x_1 = 14 - 4\sqrt{10}$ hay un mínimo local y en $x_2 = 14 + 4\sqrt{10}$ hay un máximo local.

$$f(x_1) = \frac{(14 - 4\sqrt{10})^2 - 36}{(14 - 4\sqrt{10})^2 - 2(14 - 4\sqrt{10}) - 8} \cong 3'8499 \rightarrow \text{Mínimo local } (14 - 4\sqrt{10}, 3'8499) \cong (1'35, 3'85)$$

$$f(x_2) = \frac{(14 + 4\sqrt{10})^2 - 36}{(14 + 4\sqrt{10})^2 - 2(14 + 4\sqrt{10}) - 8} \cong 1'0380 \rightarrow \text{Máximo local } (14 + 4\sqrt{10}, 1'0380) \cong (26'65, 1'04)$$

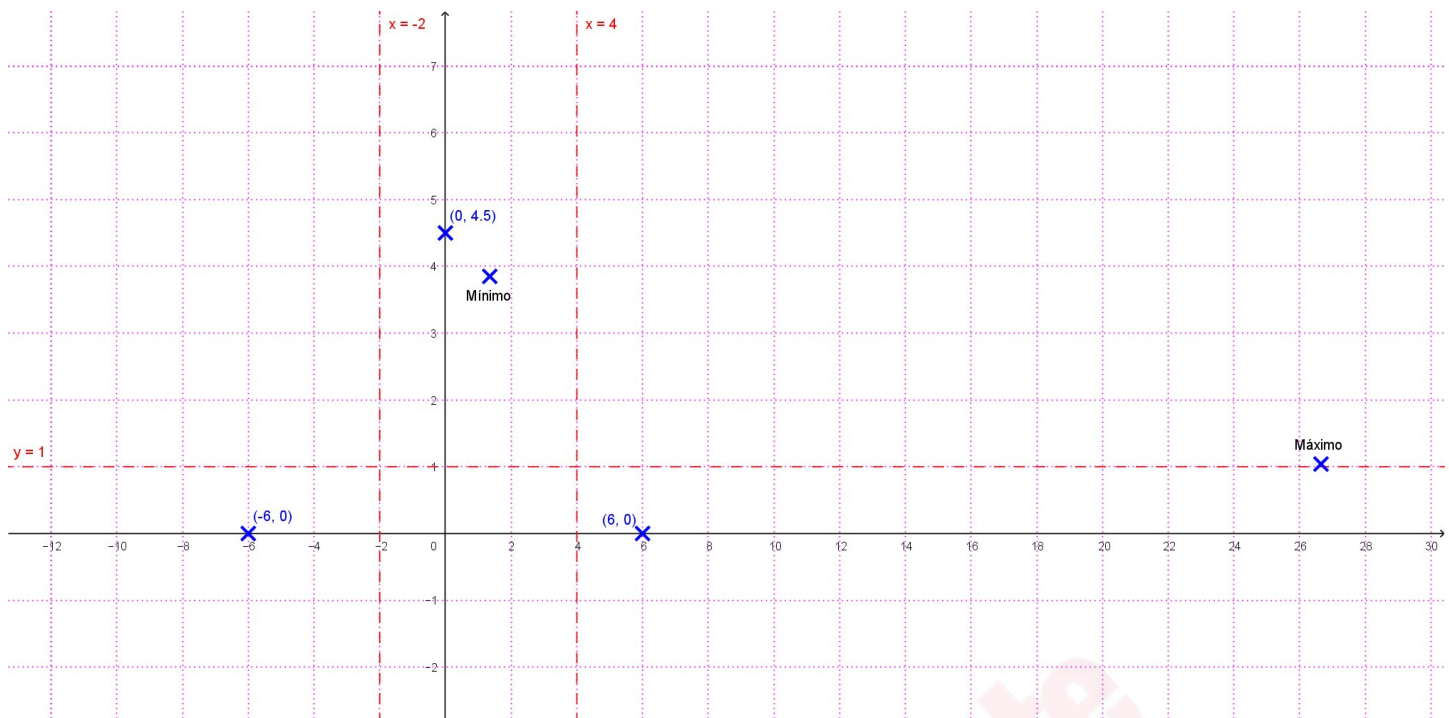
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, \frac{9}{2})$, $(-6, 0)$ y $(6, 0)$, mínimo local en $(1'35, 3'85)$, máximo local en

$(26'65, 1'04)$; a.h. $y = 1$, a.v. $x = -2$ y $x = 4$.

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 1$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{(-1000)^2 - 36}{(-1000)^2 - 2(-1000) - 8} = 0'997...$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{1000^2 - 36}{1000^2 - 2 \cdot 1000 - 8} = 1'001...$$

$y = 1$

A.V. $x = -2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-}{+} = -\infty$$

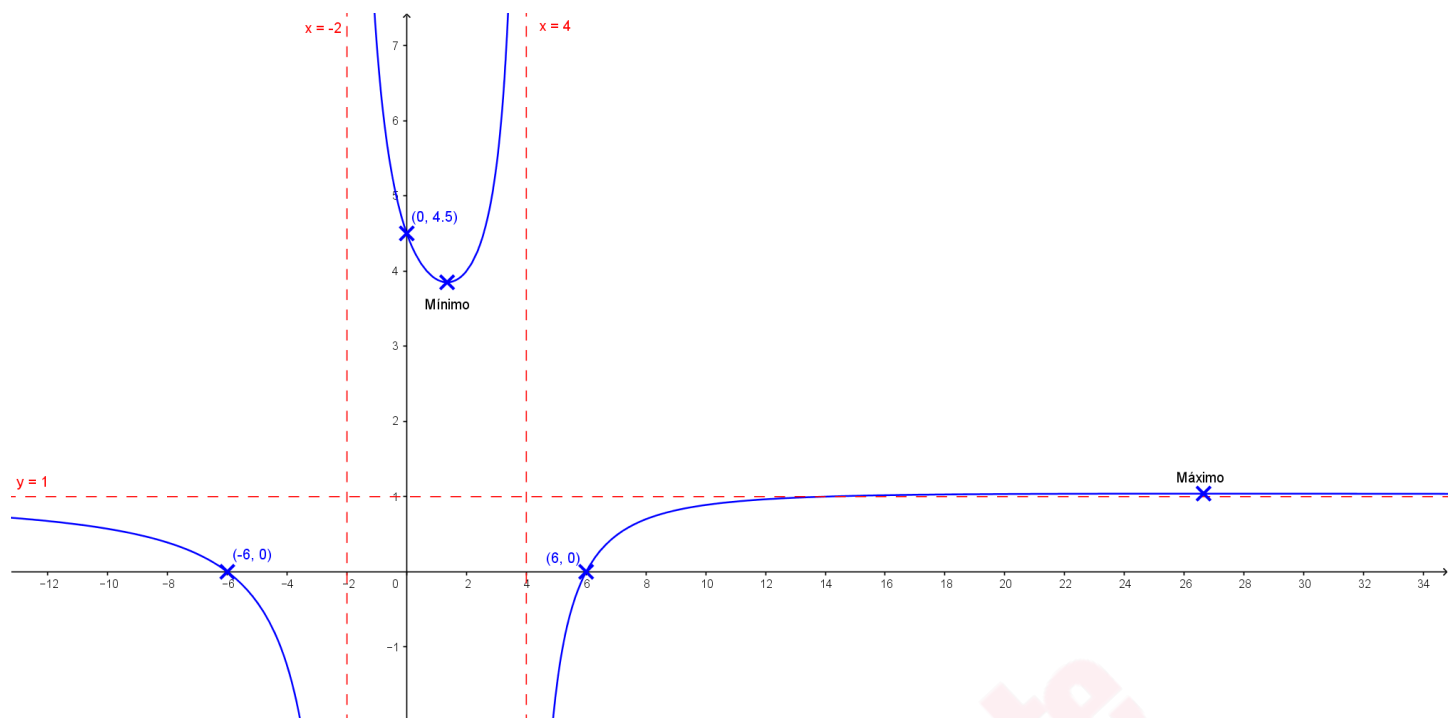
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-}{-} = +\infty$$

A.V. $x = 4$,

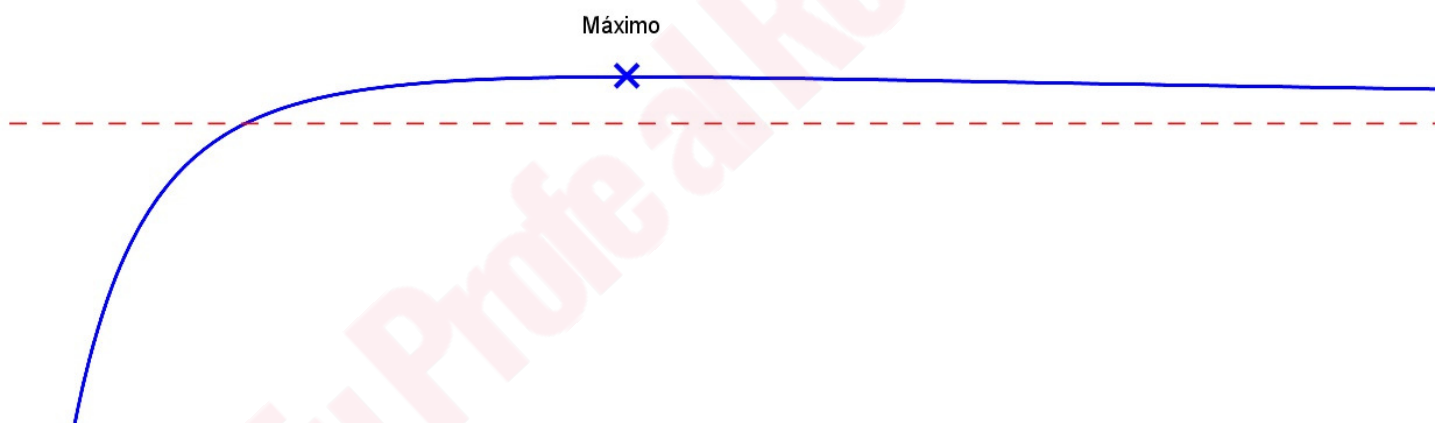
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Si nos acercamos al máximo local:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 4x^2 + 800x, \quad \text{Gastos: } G(x) = 6x^2 + 460x + 672$$

- La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? (4 puntos)
- ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? (3 puntos)
- El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Solución:

Llamando $B(x)$ al beneficio proporcionado por x unidades,

$$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - 6x^2 - 460x - 672 = -2x^2 + 340x - 672$$

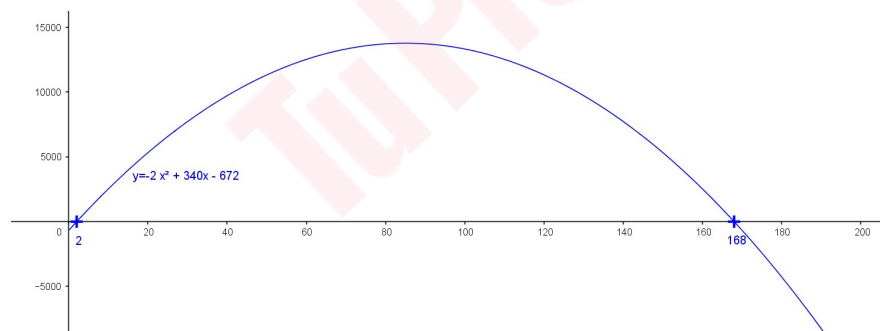
Como x es número de unidades, entonces $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

a) $x / B(x) \geq 0$

Debemos resolver la inecuación: $-2x^2 + 340x - 672 \geq 0$

$$-2x^2 + 340x - 672 = 0 \rightarrow x = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-672)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-340 \pm 332}{-4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-340 + 332}{-4} = 2 \\ x_2 = \frac{-340 - 332}{-4} = 168 \end{cases}$$

$B(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 2 y 168, gráficamente:



Por tanto $B(x) \geq 0$ cuando $x \geq 2$.

El número mínimo de unidades que debe fabricar para que el producto sea rentable es 2 (y como máximo 168).

b) $x / B(x)$ sea máximo.

Como $B(x)$ es un polinomio de 2º grado, que hemos representado antes, el máximo se alcanza en el vértice de la parábola,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-340}{2(-2)} = \frac{-340}{-4} = 85$$

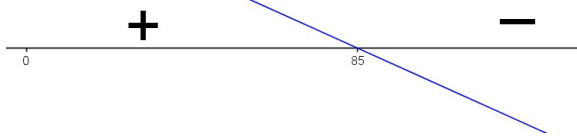
Otra forma de encontrar el máximo de $B(x)$ es estudiar el signo de $B'(x)$:

$$B'(x) = -4x + 340$$

$$-4x + 340 = 0; \quad 4x = 340; \quad x = \frac{340}{4} = 85$$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ en los intervalos: $(0, 85)$ y $(85, +\infty)$

Como $B'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 85,



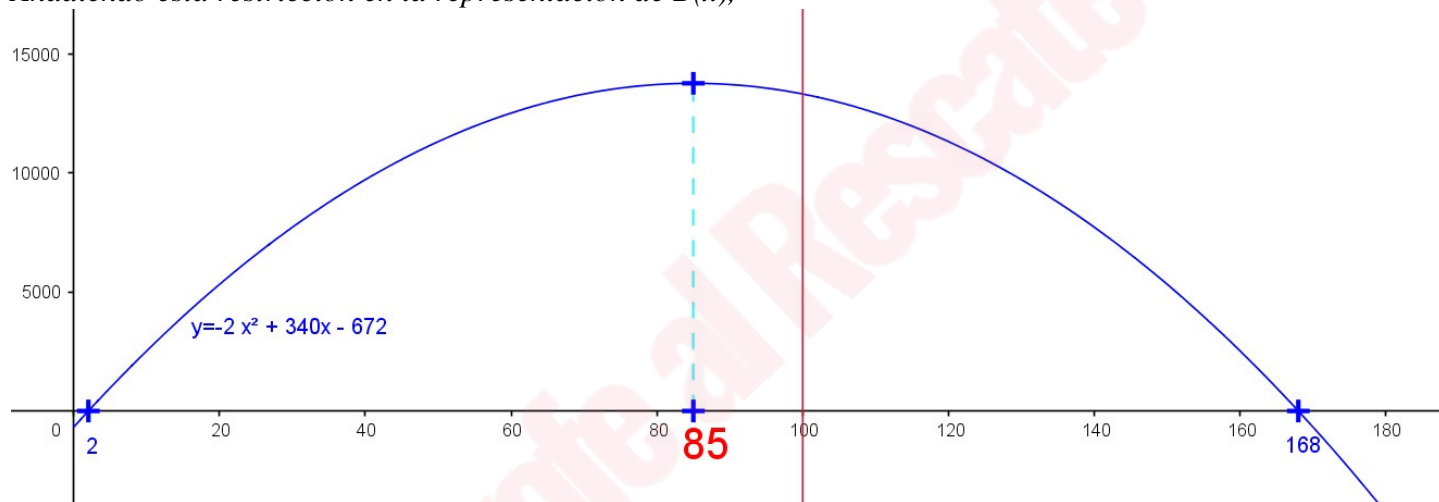
Luego, en $x = 85$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $B(x)$ ya que la función a la derecha es creciente y a la izquierda decreciente.

Para $x = 85$, $B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$.

Solución: para que el beneficio sea máximo la empresa debe fabricar 85 unidades y, en este caso, el beneficio será de 13778 €.

c) La empresa debe fabricar, al menos, 100 unidades. ¿ x ? / $B(x)$ sea máximo.

Añadiendo esta restricción en la representación de $B(x)$,



Como $B(x)$, a partir de $x = 85$ es decreciente, cuando $x \geq 100$ la función alcanza su máximo en este valor $x = 100$.

$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$.

Por tanto, el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de la nueva normativa es de 13328 €.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

- Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. (4 puntos)
- Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. (3 puntos)
- Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

B = extraer bola blanca

A = extraer bola amarilla

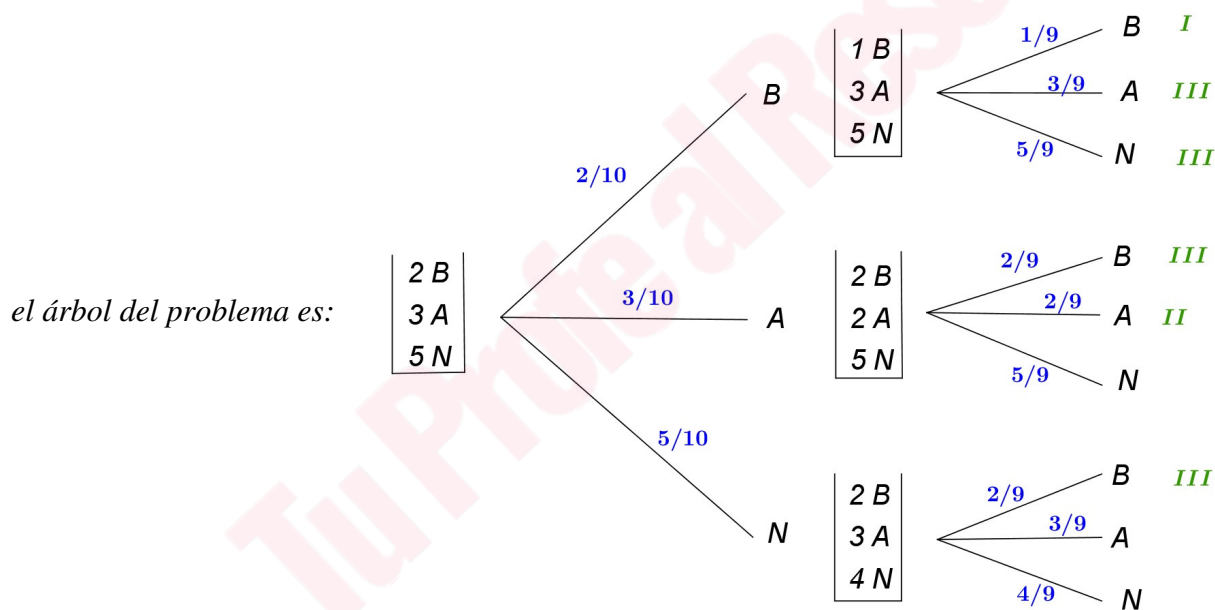
N = extraer bola negra

I = obtener 1º premio

II = obtener 2º premio

III = obtener 3º premio

Considerando todos los datos del enunciado,



- a) Probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

La probabilidad pedida es: $P(I \cup II)$

$$P(I \cup II) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

- b) Probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

La probabilidad pedida es: $P(III)$

$$P(III) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

La probabilidad pedida es:
$$P\left(\frac{III}{\text{Obtiene premio}}\right) = \frac{P(III \cap \text{Obtiene premio})}{P(\text{Obtiene premio})} = \frac{P(III)}{P(\text{Obtiene premio})}$$

$P(III)$ está calculada en el apartado b).

$$P(\text{obtener premio}) = P(I \cup II \cup III) = \{\text{utilizando lo calculado en a) y b)}\} = \frac{4}{45} + \frac{16}{45} = \frac{20}{45}$$

Por tanto,
$$P\left(\frac{III}{\text{Obtiene premio}}\right) = \frac{16/45}{20/45} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Tu Prof te al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

- La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. (2,5 puntos)
- Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso? (2,5 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

S = la persona está sana E = la persona está enferma
 $+$ = el test da positivo $-$ = el test da negativo

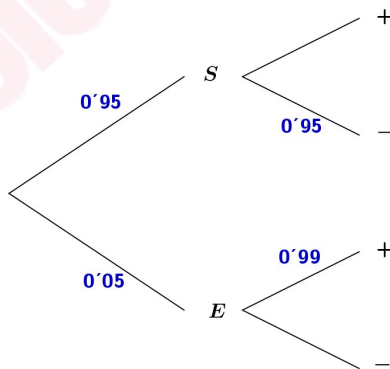
Considerando todos los datos del enunciado,

“Una determinada enfermedad afecta al 5% de la población” $\rightarrow P(E) = 0.05$ y $P(S) = 1 - 0.05 = 0.95$

“la probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad es del 99%” $\rightarrow P(+|E) = 0.99$

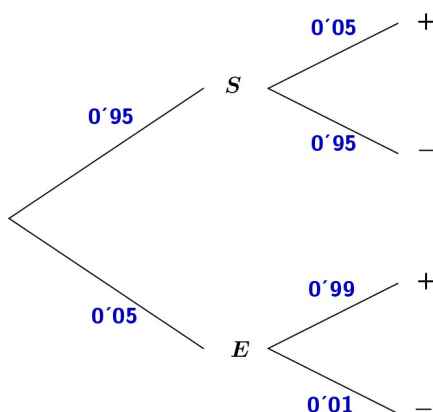
“la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%” $\rightarrow P(-|S) = 0.95$

Con los datos, el árbol del problema es:



Completando las probabilidades de las dos ramas que faltan: $1 - 0.95 = 0.05$ y $1 - 0.99 = 0.01$

El árbol queda:



a) Probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

La probabilidad pedida es: $P(E/+)$

$$P(E/+)=\frac{P(E \cap +)}{P(+)}=\frac{0'05 \cdot 0'99}{0'95 \cdot 0'05 + 0'05 \cdot 0'99}=\frac{99}{194} \cong 0'5103$$

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

La probabilidad pedida es: $P(S/-)$

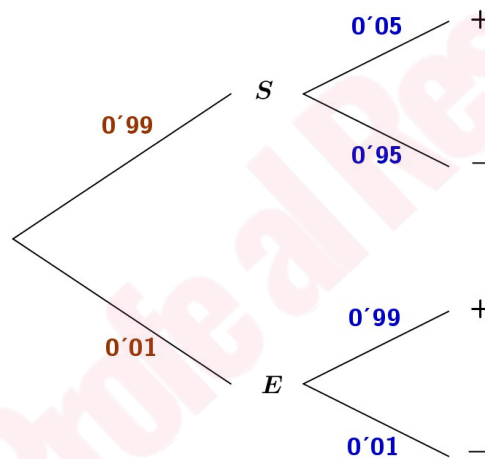
$$P(S/-)=\frac{P(S \cap -)}{P(-)}=\frac{0'95 \cdot 0'95}{0'95 \cdot 0'95 + 0'05 \cdot 0'01}=\frac{1805}{1806} \cong 0'9994$$

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

$$P(\text{test de correcto})=P(S \cap -)+P(E \cap +)=0'95 \cdot 0'95 + 0'05 \cdot 0'99=\frac{119}{125} \cong 0'952$$

d) Si la **enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población**. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

El árbol del problema sería:



La probabilidad pedida es: $P(E/+)$

$$P(E/+)=\frac{P(E \cap +)}{P(+)}=\frac{0'01 \cdot 0'99}{0'99 \cdot 0'05 + 0'01 \cdot 0'99}=\frac{1}{6} \cong 0'1667$$