

Modelo 4 de 2005

Funciones racionales, optimización, integrales y geometría del espacio.

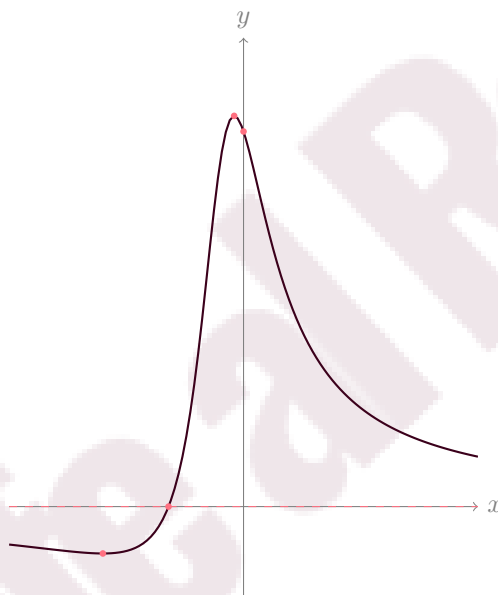
Opción A - Ejercicio 1

El denominador $x^2 + x + 1$ tiene discriminante $1 - 4 = -3 < 0$ y es siempre positivo, así que el dominio es $\mathbb{R}$. Los cortes con los ejes son $(-8/5, 0)$ y $(0, 8)$. Como el grado del denominador supera al del numerador, $y = 0$ es asíntota horizontal; no hay verticales ni oblicuas. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-(5x+1)(x+3)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Los puntos críticos son $x = -3$ y $x = -1/5$. El denominador es positivo, así que el signo de f' da decrecimiento en $(-\infty, -3)$, crecimiento en $(-3, -1/5)$ y decrecimiento en $(-1/5, +\infty)$. Los extremos son

$$f(-3) = -1 \quad (\text{mínimo local}), \quad f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{25}{3} \quad (\text{máximo local}).$$



Opción A - Ejercicio 2

En $x = 3$, $f(3) = -2$ y $f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Por tanto, la tangente es $y + 2 = x - 3$, es decir, $y = x - 5$. La diferencia entre la parábola y la tangente es

$$f(x) - (x - 5) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0.$$

La región está entre ambas curvas desde el eje y ($x = 0$) hasta su punto de tangencia ($x = 3$):

$$S = \int_0^3 (x - 3)^2 dx = \boxed{9}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (a) La matriz $A - xI$ no tiene inversa cuando su determinante se anula:

$$\det(A - xI) = (2 - x)^2 - 1 = (x - 1)(x - 3) = 0.$$

Así, $\boxed{x = 1 \text{ o } x = 3}$.

(b) Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Al imponer $A^2 + aA + bI = O$, la entrada fuera de la diagonal da $4 + a = 0$, luego $a = -4$; la diagonal da $5 + 2a + b = 0$, de donde $b = 3$. Por tanto,

$$\boxed{a = -4, \quad b = 3}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene dirección $d_r = (1, -2, -7)$. La recta s , intersección de planos con normales $(2, -3, 0)$ y $(3, -1, 0)$, tiene dirección vertical $d_s = (0, 0, 1)$. Tomamos $R = (6, 1, 5) \in r$ y, resolviendo los planos de s , $S = (1, 1, 0) \in s$. La distancia entre rectas alabeadas es

$$d(r, s) = \frac{|(S - R) \cdot (d_r \times d_s)|}{|d_r \times d_s|}.$$

Aquí $d_r \times d_s = (-2, -1, 0)$ y $S - R = (-5, 0, -5)$, por lo que

$$d(r, s) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sean L la longitud del solar y W su anchura. El área fija cumple $LW = 12800$. Como la figura divide el lado largo en tres parcelas, hay dos lindes interiores paralelas a la anchura. La valla total mide

$$V = 2L + 4W = \frac{25600}{W} + 4W, \quad W > 0.$$

Derivando, $V'(W) = -25600/W^2 + 4 = 0$ da $W^2 = 6400$, luego $W = 80$ m. La segunda derivada $51200/W^3 > 0$ confirma un mínimo. Entonces $L = 12800/80 = 160$ m. Las dimensiones óptimas son $\boxed{160 \text{ m} \times 80 \text{ m}}$. **Opción B -**

Ejercicio 2

(a) Usamos $u = 5x + 1$, $du = 5dx$:

$$\int \cos(5x + 1) dx = \boxed{\frac{1}{5} \sin(5x + 1) + C}.$$

(b) Escribimos el integrando como $(x + 2)^{-3/2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^3}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{x + 2}} + C}, \quad x > -2.$$

(c) Integramos por partes con $u = x$ y $dv = e^{-3x} dx$:

$$\int x e^{-3x} dx = -\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) e^{-3x} + C.$$

Así,

$$\int_0^1 x e^{-3x} dx = \boxed{\frac{1 - 4e^{-3}}{9}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 - m & m + 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 12(m + 7).$$

Si $m \neq -7$, A es invertible y el sistema homogéneo tiene solo la solución trivial; por tanto, es SCD. Si $m = -7$, el determinante es cero y el menor de las dos primeras filas y columnas 1,2 es $\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 38 \neq 0$, por lo que $\text{rg } A = 2$. El sistema es homogéneo, así que $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < 3$ y es SCI. Un vector del núcleo es $(1, 7, 19)$, de modo que

$$(x, y, z) = t(1, 7, 19).$$

Para $z = 19$, se toma $t = 1$ y se obtiene la solución $\boxed{(1, 7, 19)}$. **Opción B - Ejercicio 4**

Tomando las restas desde $A = (-3, 4, 0)$,

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-3), 6 - 4, 3 - 0) = (6, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (-1 - (-3), 2 - 4, 1 - 0) = (2, -2, 1).$$

Un normal al plano es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, 0, -16)$, proporcional a $(1, 0, -2)$. Al pasar por A , el plano queda $\boxed{x - 2z + 3 = 0}$. La recta perpendicular al plano tiene dirección normal $(1, 0, -2)$ y pasa por el origen:

$$\boxed{(x, y, z) = t(1, 0, -2), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de sus lados:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 0^2 + (-16)^2} = 4\sqrt{5}}.$$