

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de coincidencias 2021-2022

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Determinantes, inversa y rangos

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad cuando $b = a^2$

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. El bloque superior izquierdo de A es de orden 2, por lo que

$$\det A = a \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a(a^2 - b^2).$$

Al sustituir $b = a^2$:

$$\det A = a(a^2 - a^4) = a^3(1 - a^2) = a^3(1 - a)(1 + a).$$

El determinante se anula para $a = 0, 1, -1$. **Conclusión.** La matriz A tiene inversa si $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

b) Valor de la expresión para $b = 4, a = -2$

En estos valores,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La inversa del bloque superior izquierdo se calcula con la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 :

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-2)(-2) - 4 \cdot 4} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

La tercera entrada diagonal de A^{-1} es $-1/2$, así que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Simplificamos la expresión usando la distributividad, sin efectuar productos innecesarios:

$$\begin{aligned} A^{-1}(B + 2A) - (A^{-1} + B^T)B &= A^{-1}B + 2I - A^{-1}B - B^TB \\ &= 2I - B^TB. \end{aligned}$$

Como B es diagonal,

$$B^TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2I - B^TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. El valor de la expresión es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c) Rango de $A + B$ cuando $b = 1$

Al fijar $b = 1$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det(A + B) = (a-2)((a-1)^2 - 1) = a(a-2)^2.$$

Si $a \neq 0, 2$, el determinante no se anula y el rango es 3. Si $a = 0$, queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras filas son proporcionales y la tercera es independiente; por tanto, el rango es 2. Si $a = 2$, queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene una sola fila independiente y rango 1. **Conclusión.** $\text{rg}(A + B) = 3$ si $a \neq 0, 2$; vale 2 para $a = 0$ y 1 para $a = 2$.

A.2. Tangente, Bolzano e integral

La función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$ está definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, al ser suma de un polinomio y una función coseno.

a) Recta tangente en $x = 1$ e intersección con la gráfica

Calculamos el punto de tangencia y la pendiente:

$$f(1) = 1 + \cos \pi = 0, \quad f'(x) = 3x^2 - \pi \operatorname{sen}(\pi x), \quad f'(1) = 3.$$

La recta tangente por $(1, 0)$ con pendiente 3 es

$$y - 0 = 3(x - 1), \quad y = 3x - 3.$$

Para probar que esta recta corta la gráfica entre -3 y -2 , buscamos los ceros de la diferencia entre la función y la recta:

$$h(x) = f(x) - (3x - 3) = x^3 + \cos(\pi x) - 3x + 3.$$

La función h es continua. En los extremos:

$$h(-3) = -27 + \cos(-3\pi) + 9 + 3 = -16 < 0,$$

$$h(-2) = -8 + \cos(-2\pi) + 6 + 3 = 2 > 0.$$

Como h cambia de signo en $[-3, -2]$, el teorema de Bolzano garantiza un cero interior, que corresponde a un punto de intersección. **Conclusión.** La tangente es $y = 3x - 3$ y corta de nuevo la gráfica en algún punto de $(-3, -2)$.

b) Integral indefinida

Separamos los sumandos e integramos $x \cos(\pi x)$ por partes. Tomamos $u = x$, $dv = \cos(\pi x) dx$, por lo que $du = dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}$:

$$\begin{aligned} \int x f(x) dx &= \int (x^4 + x \cos(\pi x)) dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int \operatorname{sen}(\pi x) dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + C. \end{aligned}$$

La última igualdad usa $\int \operatorname{sen}(\pi x) dx = -\cos(\pi x)/\pi$. **Conclusión.** $\int x f(x) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + C$.

A.3. Área, volumen y simetría en el espacio

a) Área de la cara triangular ABC

Obtenemos dos vectores de la cara restando las coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, 2 - 0, 0 - 0) = (-1, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0 - 1, 0 - 0, 3 - 0) = (-1, 0, 3).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial, pues el producto da el área del paralelogramo generado por sus dos lados:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 3, 2), \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7.$$

Conclusión. El área de la cara ABC es $\frac{7}{2}$ unidades cuadradas.

b) Volumen del tetraedro

El volumen de un tetraedro con aristas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ es

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |6| = 1.$$

El factor $1/6$ aparece porque el paralelepípedo generado por las tres aristas se divide en seis tetraedros iguales. **Conclusión.** El volumen del tetraedro es 1 unidad cúbica.

c) Plano ABC y simétrico del origen

Un vector normal al plano es el producto vectorial ya calculado, $\vec{n} = (6, 3, 2)$. El plano que pasa por $A = (1, 0, 0)$ satisface

$$6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0.$$

En forma general:

$$\pi : -6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Para reflejar el origen respecto a π , primero hallamos el pie H de la perpendicular. Para un punto X y un plano $\vec{n} \cdot X + D = 0$:

$$H = X - \frac{\vec{n} \cdot X + D}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Con $X = O = (0, 0, 0)$, $D = -6$ y $\|\vec{n}\|^2 = 49$:

$$H = O - \frac{-6}{49} (6, 3, 2) = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49} \right).$$

El pie H es el punto medio entre el origen y su simétrico O' , de modo que $O' = 2H - O$:

$$O' = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right).$$

Conclusión. El plano es $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ y el simétrico de O es $\left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$.

A.4. Sucesos y distribución binomial

Sean M el suceso «utiliza un móvil para trabajar» y L el suceso «utiliza un ordenador portátil». Se tiene

$$P(M) = 0,60, \quad P(L) = 0,30, \quad P(\overline{M} \cap \overline{L}) = 0,25.$$

Por tanto, $P(M \cup L) = 1 - 0,25 = 0,75$.

a) Probabilidad de que utilice ambos dispositivos

La fórmula de inclusión-exclusión permite recuperar la intersección:

$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L).$$

Despejando:

$$P(M \cap L) = 0,60 + 0,30 - 0,75 = 0,15.$$

Conclusión. La probabilidad de que utilice ambos dispositivos es 0,15.

b) Independencia

Dos sucesos son independientes si $P(M \cap L) = P(M)P(L)$. En este caso,

$$P(M)P(L) = 0,60 \cdot 0,30 = 0,18 \neq 0,15 = P(M \cap L).$$

Conclusión. El uso del móvil y del portátil no son sucesos independientes.

c) Uso exclusivo del ordenador portátil

El suceso «solo portátil» es $L \cap \overline{M}$. Descomponemos L en los casos incompatibles $L \cap M$ y $L \cap \overline{M}$:

$$P(L \cap \overline{M}) = P(L) - P(L \cap M) = 0,30 - 0,15 = 0,15.$$

Conclusión. La probabilidad de que utilice exclusivamente el portátil es 0,15.

d) Exactamente ocho de diez personas utilizan móvil

Sea X el número de personas, entre diez, que usan móvil. Cada selección tiene probabilidad $p = 0,60$ de «éxito» (usar móvil), así que

$$X \sim \text{Binomial}(10, 0,60).$$

La probabilidad de exactamente ocho éxitos es

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} (0,60)^8 (0,40)^2 = \frac{1180980}{9765625} \approx 0,12093.$$

Conclusión. La probabilidad es $\binom{10}{8} (0,6)^8 (0,4)^2 \approx 0,12093$.

B.1. Sistema de ecuaciones sobre entradas

Sean m , a y s los números de asistentes menores de edad, adultos de menos de 60 años y personas de al menos 60 años, respectivamente. Las condiciones del enunciado dan

$$\begin{cases} m + s - a = 0, \\ m - 9s = 0, \\ 8m + 25a + 10s = 8300. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ 8 & 25 & 10 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 25 & 10 & 8300 \end{array} \right).$$

Como $\det M = 332 \neq 0$, existe una única solución. De $m = 9s$ y $a = m + s$ obtenemos $a = 10s$. Sustituimos en la ecuación de ingresos:

$$8(9s) + 25(10s) + 10s = 8300 \implies 332s = 8300 \implies s = 25.$$

Por tanto, $m = 225$ y $a = 250$. La recaudación queda comprobada: $8(225) + 25(250) + 10(25) = 1800 + 6250 + 250 = 8300$. **Conclusión.** Asistieron 225 menores de edad, 250 adultos de menos de 60 años y 25 personas de al menos 60 años.

B.2. Continuidad, extremos y área

La función se puede factorizar como

$$f(x) = xe^x - e^x = (x - 1)e^x.$$

Su dominio es $\mathbb{R}$, y tanto el polinomio como la exponencial son continuos y derivables en todo ese dominio. **Conclusión.** f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

Para estudiar la monotonía usamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = xe^x.$$

Como $e^x > 0$ para todo x , el signo de $f'(x)$ depende únicamente de x . Así, $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$. La función decrece hasta 0 y crece después; el cambio de signo de negativo a positivo identifica un mínimo relativo en $x = 0$:

$$f(0) = (0 - 1)e^0 = -1.$$

Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^x = +\infty$, por lo que ese mínimo es también absoluto. **Conclusión.** f decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, +\infty)$ y tiene un mínimo relativo y absoluto en $(0, -1)$.

c) Área entre f y g en $[0, 1]$

Comparamos las funciones:

$$f(x) - g(x) = (x - 1)e^x - (-e^x) = xe^x \geq 0 \quad \text{en } [0, 1].$$

Así, f está por encima de g y el área se obtiene integrando $f - g$:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 xe^x dx.$$

Integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x dx$, de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\mathcal{A} = [(x - 1)e^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1.$$

Conclusión. El área del recinto es 1 unidad cuadrada.

B.3. Planos y posición relativa de rectas

La recta r ya está en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y su vector director es $\vec{u} = (-1, 2, 1)$. Los planos tienen vectores normales

$$\vec{n}_1 = (0, 1, 1), \quad \vec{n}_2 = (2, -1, 1).$$

a) Ángulo entre π_1 y π_2

El ángulo entre dos planos es el ángulo agudo entre sus normales. Aquí,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Conclusión. Los planos son perpendiculares y forman un ángulo de 90° .

b) Posición relativa de r y s

La recta s es la intersección de los dos planos. Tomamos $z = t$; de $y + z = -1$ resulta $y = -1 - t$, y al sustituir en $2x - y + z = -3$ obtenemos $x = -2 - t$. Así,

$$s : \begin{cases} x = -2 - t, \\ y = -1 - t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

con vector director $\vec{v} = (-1, -1, 1)$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, luego las rectas no son paralelas. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas. Las ecuaciones para x y z exigirían simultáneamente

$$2 - \lambda = -2 - t \implies \lambda - t = 4, \quad 2 + \lambda = t \implies t = 2 + \lambda.$$

Pero estas dos relaciones dan $\lambda - (2 + \lambda) = -2$, que no puede ser 4. No hay intersección; al no ser paralelas, las rectas son cruzadas. **Conclusión.** r y s son rectas cruzadas.

c) Plano perpendicular a s por el punto de r con $y = 0$

En la recta r , la segunda coordenada es $y = 2\lambda$. Para que sea nula, $\lambda = 0$, y el punto correspondiente es $P = (2, 0, 2)$. Un plano perpendicular a s tiene como vector normal el director $\vec{v} = (-1, -1, 1)$. Su ecuación por P es

$$-(x - 2) - y + (z - 2) = 0,$$

que se simplifica a

$$x + y - z = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $x + y - z = 0$.

B.4. Probabilidad condicionada

Los datos del enunciado son

$$P(A | B) = \frac{1}{3}, \quad P(B | A) = \frac{1}{14}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{15}.$$

a) Demostrar que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$

Sea $x = P(A \cap B)$. Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A | B) = \frac{x}{P(B)} = \frac{1}{3} \implies P(B) = 3x,$$

$$P(B | A) = \frac{x}{P(A)} = \frac{1}{14} \implies P(A) = 14x.$$

El suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$ es el complementario de $A \cup B$. Por inclusión-exclusión,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)).$$

Sustituimos las expresiones en función de x y el dato $7/15$:

$$\frac{7}{15} = 1 - (14x + 3x - x) = 1 - 16x \implies x = \frac{1}{30}.$$

Conclusión. $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.

b) Calcular $P(A)$ y $P(B)$

Usamos las relaciones obtenidas al aplicar las probabilidades condicionadas:

$$P(A) = 14x = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}, \quad P(B) = 3x = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Conclusión. $P(A) = \frac{7}{15}$ y $P(B) = \frac{1}{10}$.