

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ obtener de forma razonada los valores de } x, y, z.$$

Solución:

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{pmatrix} 3x-2y \\ -2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3x-2y+x \\ -2x+y+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4x-2y \\ -2x+2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esta última igualdad podemos expresarla como la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{que podemos escribir como} \quad AX = B$$

La solución será: $X = A^{-1}B$. Calculemos la matriz A^{-1} , por Gauss o por adjuntos el resultado será

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución será: $x = -2, y = 1, z = 2$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y 30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y de 10 minutos para el modelo B. Se dispone para el trabajo manual de 6000 minutos al mes y para el de máquina de 4800 minutos al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 € para el modelo A y de 10 € para el modelo B, planificar la producción mensual para obtener el máximo beneficio y calcular éste.

Solución:

Resumiendo la información del ejercicio en una tabla,

Lámpara	manual	máquina	beneficio
A	20 min	20 min	15 €
B	30 min	10 min	10 €
disponibles	6000 min	4800 min	

Las incógnitas a utilizar son: $x = \text{n}^\circ \text{ de lámparas del modelo A}$

$y = \text{n}^\circ \text{ de lámparas del modelo B}$

El beneficio que se obtiene es: $15x + 10y$

Las restricciones del problema son:

trabajo manual	$20x + 30y \leq 6000$
trabajo de máquina	$20x + 10y \leq 4800$

El problema de programación lineal a resolver es:

maximizar $z = 15x + 10y$

s.a. $20x + 30y \leq 6000$ Las restricciones las simplificamos por 10 quedando:

$20x + 10y \leq 4800$

$x, y \in \mathbb{N}$

maximizar $z = 15x + 10y$

s.a. $2x + 3y \leq 600$

$2x + y \leq 480$

$x, y \in \mathbb{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$2x + 3y \leq 600$$

$$2x + y \leq 480$$

representación de $2x + 3y = 600$

representación de $2x + y = 480$

x	y
0	200
300	0

x	y
0	480
240	0

$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 600$$

$0 \leq 600$ sí

$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 480$$

$0 \leq 480$ sí

Cálculo del punto de corte de las dos rectas, $(210, 60)$,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 600 \\ 2x + y = 480 \end{cases}$$

Restando:

$$2y = 120$$

$$y = 60$$

Sustituyendo en 2ª ecuación

$$2x + 60 = 480; 2x = 420$$

$$x = 210$$

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona doblemente rayada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

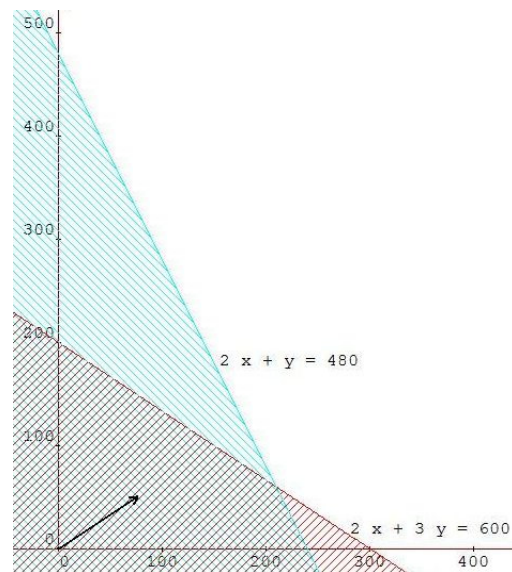
(x,y)	$z = 15x + 10y$
(0,0)	0
(0,200)	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 200 = 2000$
(210,60)	$15 \cdot 210 + 10 \cdot 60 = 3750$
(240,0)	$15 \cdot 240 + 10 \cdot 0 = 3600$

máximo

Para obtener el máximo beneficio la producción mensual debe ser:

210 lámparas del modelo A y 60 del modelo B.

Con esta producción el beneficio será de 3750 €



EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Se cree que el número y de unidades vendidas de un cierto producto en función de su precio en euros, x , viene dado por $y = 50 - x$, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio $x-10$, determina de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

Solución:

Resumiendo en una tabla la información del problema,

Precio unidad	Unidades vendidas	Beneficio unitario	Beneficio total	
x	$50 - x$	$x - 10$	$(50 - x)(x - 10)$	$x \in [0, 50]$

Llamando z al beneficio total, $z = (50 - x)(x - 10) = 50x - 500 - x^2 + 10x = -x^2 + 60x - 500$, $x \in [0, 50]$

Queremos maximizar el beneficio, buscamos el máximo de la función z .

Busquemos el máximo relativo,

$$z' = -2x + 60, \quad -2x + 60 = 0, \quad x = 30$$

$z'' = -2$, para $x = 30$ $z'' < 0$, para $x = 30$ z tiene un máximo relativo. ¿Es éste el máximo de z en el intervalo $[0, 50]$?

Gráficamente z es una parábola (invertida, coeficiente de x^2 es -1), el máximo absoluto lo alcanza en su vértice,

$$\text{para } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2(-1)} = 30$$

Por tanto, en $x = 30$ la función z alcanza su máximo en el intervalo $[0, 50]$.

	Precio unidad	Unidades vendidas	Beneficio unitario	Beneficio total	
	x	$50 - x$	$x - 10$	$(50 - x)(x - 10)$	$x \in [0, 50]$
Solución	30 €	20	20 €	$(50-30)(30-10) = 20 \cdot 20 = 400$ €	

El precio que producirá un mayor beneficio es el de 30 €, el número de unidades vendidas será 20 y el beneficio obtenido será de 400 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50% de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70%. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

- Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.
- Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

Solución:

Nombrando los sucesos de la siguiente forma:

B_1 = el lector acude a la primera biblioteca.

B_2 = el lector acude a la segunda biblioteca.

N = el lector elige una novela.

N' = el lector no elige una novela.

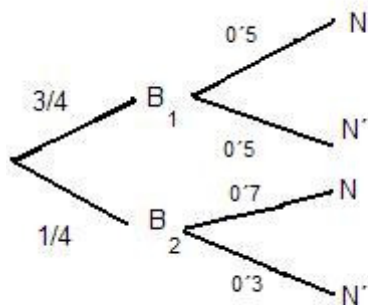
Calculemos previamente $p(B_1)$ y $p(B_2)$. Sabemos que $p(B_1) = 3 p(B_2)$ y que en la ciudad sólo hay estas dos bibliotecas, es decir, B_1 y B_2 son incompatibles y su unión es E ,

$$p(B_1) + p(B_2) = 1$$

$$3 p(B_2) + p(B_2) = 1$$

$$4 p(B_2) = 1 \quad , \quad p(B_2) = 1/4 \quad \text{y} \quad p(B_1) = 3/4$$

El árbol del problema será



$$a) p(N) = p(B_1)p\left(\frac{N}{B_1}\right) + p(B_2)p\left(\frac{N}{B_2}\right) = \frac{3}{4} 0.5 + \frac{1}{4} 0.7 = 0.55$$

$$b) p\left(\frac{B_1}{N}\right) = \frac{p(B_1 \cap N)}{p(N)} = \frac{p(B_1)p\left(\frac{N}{B_1}\right)}{p(N)} = \frac{\frac{3}{4} 0.5}{0.55} = 0.6818$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El 75 % de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60 % de los que utilizan transporte y el 90 % de los que acuden andando. Calcular de forma razonada:

- si se elige a azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando, y
- si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntual.

Solución:

Nombrando los sucesos de la siguiente forma:

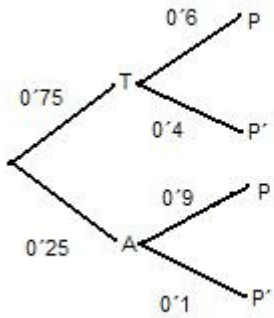
T = el alumno acude a clase en transporte.

A = el alumno acude a clase andando.

P = el alumno llega puntual.

P' = el alumno no llega puntual.

El árbol del problema será



$$a) \quad p\left(\frac{A}{P}\right) = \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{p(A) p\left(\frac{P}{A}\right)}{p(T) p\left(\frac{P}{T}\right) + p(A) p\left(\frac{P}{A}\right)} = \frac{0.25 \cdot 0.9}{0.75 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.9} = 0.3333$$

$$b) \quad p(P') = p(T) p\left(\frac{P'}{T}\right) + p(A) p\left(\frac{P'}{A}\right) = 0.75 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.1 = 0.325$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Debo tomar al menos 60 mgr de vitamina A y al menos 90 mgr de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir dos pastillas de marcas diferentes X e Y. Cada pastilla de la marca X contiene 10 mgr de vitamina A y 15 mgr de vitamina B y cada pastilla de la marca Y contiene 10 mgr de cada vitamina. Además, no es conveniente tomar más de 8 pastillas diarias. Sabiendo que el precio de cada pastilla de la marca X es 50 céntimos de euro y que cada pastilla de marca Y cuesta 30 céntimos de euro, calcular de forma razonada:

- Cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo, y
- Cuál es el coste mínimo.

Solución:

Resumiendo la información del ejercicio en una tabla,

marca	Vitamina A	Vitamina B	precio
X	10 mgr	15 mgr	0'50 €
Y	10 mgr	10 mgr	0'30 €
máximo 8	mínimo 60 mgr	mínimo 90 mgr	

Las incógnitas a utilizar son: $x = n^{\circ}$ de pastillas de la marca X
 $y = n^{\circ}$ de pastillas de la marca Y

El coste es: $0'50x + 0'30y$

Las restricciones del problema son: $\text{máximo número de pastillas } x + y \leq 8$
 $\text{mínima cantidad de vit. A } 10x + 10y \geq 60$
 $\text{mínima cantidad de vit. B } 15x + 10y \geq 90$

El problema de programación lineal a resolver es:

minimizar $z = 0'50x + 0'30y$ s.a. $x + y \leq 8$ $10x + 10y \geq 60$ $15x + 10y \geq 90$ $x, y \in \mathbb{N}$	Simplificamos la segunda restricción por 10 y la tercera por 5:	minimizar $z = 0'50x + 0'30y$ s.a. $x + y \leq 8$ $x + y \geq 6$ $3x + 2y \geq 18$ $x, y \in \mathbb{N}$
---	--	--

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$x + y \leq 8$$

$$x + y \geq 6$$

$$3x + 2y \geq 18$$

$$x + y = 8$$

$$x + y = 6$$

$$3x + 2y = 18$$

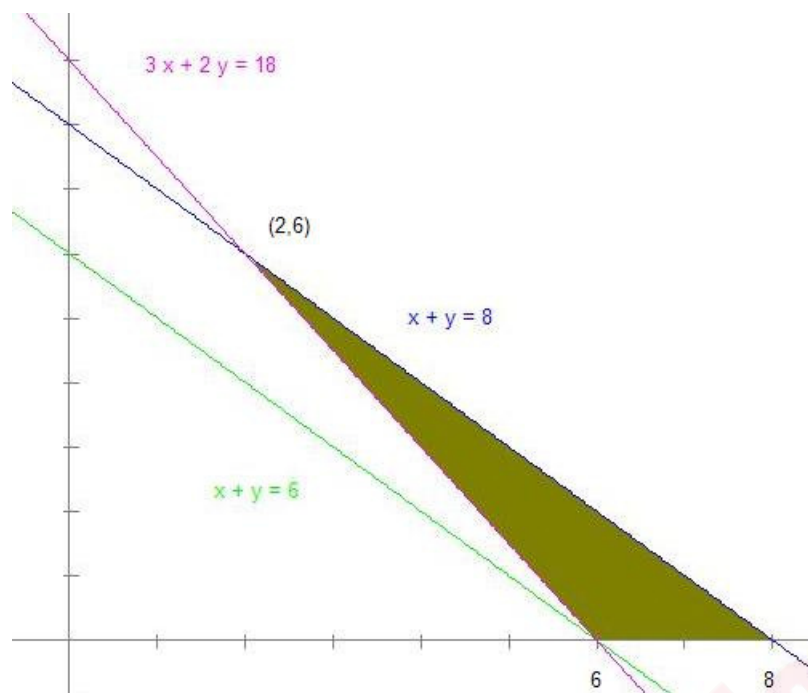
x	y
0	8
8	0

x	y
0	6
6	0

x	y
0	9
6	9

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 8$ Sí (0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 0 \geq 6$ No (0,0) ¿cumple la restricción? No $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 18$ No

La representación gráfica es,



Calculemos el punto de corte que hace falta conocer,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

Multiplicando la 1ª ecuación por -2

$$\begin{cases} -2x - 2y = -16 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$x = 2$$

Sustituyendo en la 1ª

$$2 + y = 8; \quad y = 6$$

El punto de corte es $(2,6)$

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.
 Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 0'50 x + 0'30 y$		<i>a) Para que el coste sea mínimo debo tomar diariamente 2 pastillas de la marca X y 6 de la marca Y.</i>
$(6,0)$	3		
$(2,6)$	2'80	mínimo	
$(8,0)$	4		
			<i>b) Con este consumo el coste mínimo diario será de 2'80 €</i>

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble de cuadrado del segundo sea mínimo.

Solución:

El número 90 se descompone en los dos sumandos siguientes:

$$\text{primer sumando} = x$$

$$\text{segundo sumando} = 90 - x$$

La condición del problema es que $x^2 + 2(90 - x)^2$ sea mínimo. Consideramos la función $y = x^2 + 2(90 - x)^2$, busquemos su mínimo.

$$y = x^2 + 2(90 - x)^2$$

$$y' = 2x + 4(90 - x)(-1) = 2x - 360 + 4x = 6x - 360$$

$$y' = 0 \rightarrow 6x - 360 = 0 \rightarrow x = 60$$

$$y'' = 6 \quad \text{como para } x = 60 \quad y'' = 6 > 0, \text{ en } x = 60 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Para que se cumpla la condición del problema los sumandos deben ser 30 y 60.

Tu Profe al Rescate